ベーシックレベル数学Ⅱを受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ ベーシックレベル数学Ⅱの講座へ。この講座は

「数学Ⅱを，用語の意味や公式のなりたちについて理解するところから学習したい」

という人に適した講座となっています。

数学Ⅱでは，高校数学の根幹とも言える内容を学習します。この講座では，算数や中学校の数学や数学Ⅰの学習で得た知識や経験を時に振り返りながら，新たな知識や考え方を，1つ1つ，丁寧に，あなたと一緒に積み重ねていきます。

予習は必要ありません。「講義動画」で，いちから説明します！

テキストの使い方，講座の受講の仕方については，後ほど詳しく説明します。

この講座を受講いただくことで，学校の授業の理解をより深めたり，学校から課された宿題を解きながらそこで問われている内容を確認したり，といったことが可能になります。しかし，この講座で扱う内容は，決して簡単ではありません。だからこそ，あなたがこの講座を通じて数学Ⅱと本気で向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業しています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し，自分のものにする，そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を1回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで，講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に習った知識を使うことで，その意味がわかる，というのも数学ならではですし，気になって前に戻り改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。

ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　式と証明

第１講　式と計算
PART1　３次式の展開と因数分解の公式
PART2　二項定理
PART3　多項式の除法
PART4　分数式の計算

第２講　式と証明
PART1　恒等式
PART2　等式の証明
PART3　不等式の証明
PART4　平方の大小関係
PART5　相加平均と相乗平均

第２章　複素数と方程式

第３講　複素数と２次方程式
PART1　複素数とその計算
PART2　負の数の平方根と２次方程式
PART3　２次方程式の解の判別
PART4　２次方程式の解と係数の関係

第４講　剰余の定理と因数定理，高次方程式
PART1　剰余の定理
PART2　因数定理
PART3　組立除法と因数分解
PART4　高次方程式の解法

第３章　図形と方程式

第５講　点と直線
PART1　２点間の距離，数直線上の分点の座標
PART2　座標平面上の点
PART3　直線の方程式
PART4　２直線の関係
PART5　点と直線の距離

第６講　円
PART1　円の方程式
PART2　円と直線の共有点の座標と個数
PART3　円と直線の位置関係
PART4　円の接線

第７講　軌跡と領域
PART1　軌跡の方程式
PART2　不等式の表す領域
PART3　連立不等式の表す領域
PART4　領域と最大・最小

第４章　三角関数

第８講　三角関数とその性質
PART1　動径と一般角
PART2　弧度法
PART3　三角関数
PART4　三角関数の相互関係
PART5　三角関数の性質

第 9 講　三角関数のグラフ

PART1　三角関数のグラフ

PART2　いろいろな三角関数のグラフ

第 10 講　三角関数を含む方程式，不等式

PART1　三角関数を含む方程式

PART2　三角関数を含む不等式

第 11 講　加法定理

PART1　正弦・余弦の加法定理

PART2　正接の加法定理，２直線のなす角

PART3　２倍角の公式，半角の公式

PART4　三角関数の合成

第５章　指数関数・対数関数

第 12 講　指数の拡張

PART1　０や負の整数の指数

PART2　累乗根

PART3　有理数の指数

第 13 講　指数関数

PART1　指数関数のグラフ

PART2　指数関数の性質

PART3　指数関数を含む方程式・不等式

第 14 講　対数とその性質

PART1　対数

PART2　対数の性質

PART3　底の変換公式

第 15 講　対数関数

PART1　対数関数のグラフ

PART2　対数関数の性質

PART3　対数関数を含む方程式・不等式

PART4　常用対数

第６章　微分法・積分法

第 16 講　微分係数と導関数

PART1　平均の速さ，平均変化率

PART2　極限値と微分係数

PART3　導関数

PART4　導関数の計算

第 17 講　導関数の応用

PART1　接線の方程式

PART2　曲線上にない点から引いた接線

PART3　関数の増減

PART4　関数の極大・極小

PART5　関数の最大・最小

PART6　方程式への応用

第 18 講　不定積分，定積分

PART1　不定積分

PART2　x^n の不定積分，不定積分の性質

PART3　定積分

PART4　定積分の性質

第 19 講　定積分と面積

PART1　定積分と面積

PART2　２つの曲線の間の面積

講座の受講の仕方

ここでは, 効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い, 実力を伸ばしていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとにいくつかのPART(パート)に分かれています。

各PARTは，次のような項目で構成されています。

「要点」

⇒　そのPARTで習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ち

「講義問題」（1，2など）

⇒　「要点」で学んだことを確認する問題

「Point Pickup」

⇒　「要点」で学んだことをベースに，知識を整理

「確認問題」

⇒　「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「要点」「講義問題」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。ある講に含まれるPARTの一部または全部が未習，または理解が不十分の状態で講義を受講いただいても，まったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら, テキストと筆記用具を手元におき, 動画を再生してください。そして, 真剣に受講して, 講師がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれるPART内の動画は，複数のチャプターに分かれています。

（例）　第１講　式と計算

PART1　３次式の展開と因数分解の公式　…　【要点整理①】・【要点整理②】・【問題解説】

それぞれのPARTにおける主な受講の流れを説明します。

(1)　【要点整理】のチャプターで，「要点」の内容を解説します。このPARTで習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ちを解説します。

必要なことは予めテキストに記載してあります。その上で，一部「穴埋め」や「記述」が必要な部分があります。講師の話に全力で耳を傾け，テキストを完成させましょう。

⑵　【問題解説】のチャプターで，1，2，3，4といった「講義問題」を解説します。

まずは，「Point Pickup」にて，「要点」を通じて習得したことを整理します。【要点整理】と同様，一部「穴埋め」や「記述」となっています。

次に，「Point Pickup」で整理した知識や考え方を元に，実際に問題を解いていきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一次停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉の一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

さらに，解説された講義問題を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，自分で書いた途中計算や別冊解答を参照して，どこに止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

「要点」→「Point Pickup」→「講義問題」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 15 分～ 30 分の受講時間となります。

各講に含まれるすべての PART の受講が終了すると，その講が終了します。時間がない時は, PART 単位の受講でも構いません。また, 週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

・「新しい知識や考え方を知って，思考の幅を広げる」

・「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」

・「問題が解けるようになることがゴールではなく，前提となる知識・考え方を学ぶ」

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，数学が苦手な人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれませんが, 安心してください。この講座は, いつでも画面を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味を持つのかを考えること，必要なら戻って何度も聞くこと。焦る必要はありません。そして, 講座の受講を進めていくうちに, 感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう１つ大切なこと，それは

・「やっぱり自分はできないんだ……」は厳禁！

だということです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気付いていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この PART から何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

・この PART を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずは【問題解説】の動画を，それでも思い出せない場合は【要点整理】の動画を見直してみましょう。記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学んだことを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその講の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに「**確認問題**」を用意してあります。講義問題と同様，その PART で学んだ知識・考え方を確認することができる問題セットとなっていますので，この PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

解き終えたら，「別冊解答」を見て，解き方をチェックしてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，使う練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まり，数学Ⅱの世界観が少しずつ見えてくるようになってきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各 PART，およそ 15 分 ~ 30 分。それを，どこの曜日のどの時間帯に何 PART（何講）受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。学校で授業を受ける時間と同じように，時と場所を変えて『スタディサプリ』を受講する時間，数学Ⅱと本気で向きあう時間，これを確保してください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気付き，それが「自信」につながります。

この「ベーシックレベル数学Ⅱ」は，あくまで数学Ⅱの「入門講座」です。入門は，簡単という意味ではなく，その先に進むために欠かすことのできない「作法」を身に付ける，ということです。受講後は，**「高 1・高 2 スタンダードレベル数学Ⅱ」**に進んでみてください。自分の知識がどのように活用できるのか，それを知れば，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に広がる数学Ⅱの世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

第 1 講　式と計算

PART1　3 次式の展開と因数分解の公式

要点 ①　3 次式の展開の公式

展開する式がある特別な形をしているとき，以下の「展開の公式」により，その展開の途中計算を省略することができることを数学Ⅰで学んだ。

展開の公式

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
- $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$(a+b)^3$ を展開すると

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)^2(a+b)\\&=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\&=(a^2+2ab+b^2)a+(a^2+2ab+b^2)b\\&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

この結果を利用して $(a-b)^3$ を展開すると

$(a-b)^3=$

$=\quad+\quad\quad+\quad\quad+$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

以上より，次の展開の公式が成り立つ。

3 次式の展開の公式(1)

1　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

例　$(x+2)^3=\qquad\qquad=$

$(x-3)^3=\qquad\qquad=$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=$

$=\qquad\qquad =a^3-b^3$

であることから，次の展開の公式も成り立つ。

3次式の展開の公式(2)

3 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

4 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

例 $(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=\qquad =$

$(x-4)(x^2+4x+16)=(x-4)(x^2+x\cdot 4+4^2)=\qquad =$

要点② 3次式の因数分解の公式

展開の公式

3 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$　　**4** $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

を逆にみると，次の因数分解の公式が得られる。

3次式の因数分解の公式

1 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

2 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

例 $x^3+125=x^3+\qquad =(x+5)(x^2-x\cdot\quad +\quad)=(x+5)(x^2-5x+25)$

$8x^3-27y^3=\qquad -\qquad =(\quad -\quad)\{\qquad +\quad \cdot\quad +\qquad \}$

$=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

立方数(自然数の3乗で表される数)は，小さい順に以下の通り。

$1=\quad$, $8=\quad$, $27=\quad$, $64=\quad$, $125=\quad$, ……

1 (1) 次の式を展開せよ。

(i) $(x+4)^3$　(ii) $(3x-2y)^3$

(iii) $(x+6)(x^2-6x+36)$　(iv) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

(2) 次の式を因数分解せよ。

(i) x^3+8　(ii) $27a^3-64b^3$

Point Pickup

3 次式の展開の公式

1 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　**2** $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

3 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$　**4** $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

3 次式の因数分解の公式

1 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　**2** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

第 1 講　PART1 確認問題

次の式を展開せよ。

1　$(x-4)^3=x^3-$ アイ x^2+ ウエ $x-$ オカ

2　$(3a+b)^3$

$=$ キク a^3+ ケコ a^2b+ サ ab^2+b^3

3　$(x+5)(x^2-5x+25)=$ シ

①　x^3+125　②　$x^3+5x^2+25x+125$

③　x^3-125　④　$x^3-5x^2+25x-125$

4　$(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)=$ ス

①　a^3+8b^3　②　$a^3+2a^2b+4ab^2+8b^3$

③　a^3-8b^3　④　$a^3-2a^2b+4ab^2-8b^3$

次の式を因数分解せよ。

5　$x^3-64=(x-\boxed{セ})(x^2+\boxed{ソ}x+\boxed{タチ})$

6　$27a^3+8b^3$

$=(\boxed{ツ}a+\boxed{テ}b)(9a^2-\boxed{ト}ab+\boxed{ナ}b^2)$

【MEMO】

PART2 二項定理

要点 ① パスカルの三角形

$(a+b)^3=$ 　　　　　　　　　　　　である。この公式を利用して，$(a+b)^4$ を展開すると

$$\begin{aligned}(a+b)^4&=(a+b)^3(a+b)\\&=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)\\&=a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4\\&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 3\ 3\ 1\ \ \ \\ +)\ \ \ 1\ 3\ 3\ 1 \\ \hline 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \end{array}$$

$(a+b)^4$ の展開式における各項の係数だけを取り出すと，$(a+b)^3$ の展開式の各項の係数を 1 つずつずらして足したものになっている。すなわち $(a+b)^4$ の展開式における各項の係数は，両端の項の係数 1 以外は，$(a+b)^3$ の展開式における「隣接する項の係数の和」になっていることがわかる。

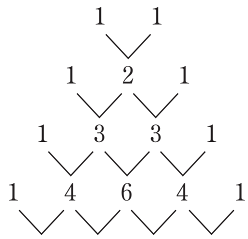
$(a+b)^n$ の展開式における各項の係数を並べると，右図のようになる。

このような数の配列を「　　　　　　　　　　」という。

これを用いると，$(a+b)^5$ の展開式は

$(a+b)^5=a^5+\ \ a^4b+\ \ \ a^3b^2+\ \ \ a^2b^3+\ \ ab^4+b^5$

$(a+b)^1$
$(a+b)^2$
$(a+b)^3$
$(a+b)^4$
$(a+b)^5$



要点 ② 二項定理

n 個のものから r 個取り出す組合せの総数　　を用いて，$(a+b)^n$ の展開式における各項の係数を求める。

例えば，$(a+b)^2=\overbrace{(a+b)}^{①}\overbrace{(a+b)}^{②}$ の展開式において，①，②のそれぞれから a，b のいずれか一方を選んで掛け合わせ，それらの積の和を求めることで，展開式の項が得られる。項 ab は

（i）①から a を選び，②から b を選んで掛け合わせた積

（ii）①から b を選び，②から a を選んで掛け合わせた積

の和である。

（i）$(\underline{a}+b)(a+\underline{b})$

（ii）$(a+\underline{b})(\underline{a}+b)$

a，b のいずれか一方を選んで掛け合わせるので，項 ab の「a」について

（i）①から a を選ぶ（②からは b が選ばれる）

（ii）②から a を選ぶ（①からは b が選ばれる）

と見ることにより，a を①，②のどちらから選ぶかで　　　通りある，といえる。これが，$(a+b)^2$ の展開式 $a^2+2ab+b^2$ における ab の係数　である。

$(a+b)^3=\overset{①}{(a+b)}\overset{②}{(a+b)}\overset{③}{(a+b)}$ の展開式において，項 a^2b は①，②，③から a を 2 個，b を 1 個選んで掛け合わせた積の和によって得られる。①，②，③から b を取り出す 1 つを選ぶ方法が　　　通りあり，これが $(a+b)^3$ の展開式 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ における a^2b の係数　である。

$(a+\boxed{b})(\boxed{a}+b)(\boxed{a}+b)$

$(\boxed{a}+b)(a+\boxed{b})(\boxed{a}+b)$

$(\boxed{a}+b)(\boxed{a}+b)(a+\boxed{b})$

同様に考えると，$(a+b)^3$ の展開式における項 a^3，$3a^2b$，$3ab^2$，b^3 の係数はそれぞれ　　，　　，　　，　　である。

一般に，次の定理が成り立つ。

二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0\,a^n+{}_n\mathrm{C}_1\,a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2\,a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\,ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n\,b^n$$

二項定理における ${}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r$ を，$(a+b)^n$ の展開式の「　　　　」，係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を「　　　　　」という。

2　(1)　二項定理を用いて，$(x+3)^5$ を展開せよ。

(2)　$(2x-3y)^6$ の展開式における x^4y^2 の項の係数を求めよ。

Point Pickup

二項定理と一般項

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots$$
$$+ {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の一般項，${}_n\mathrm{C}_r$ を二項係数という。

第 1 講　PART2 確認問題

1　二項定理を用いて，次の式を展開せよ。

$(x+2)^5$

$=x^5+$ アイ x^4+ ウエ x^3+ オカ x^2+ キク $x+32$

2　$(4x-3y)^5$ の展開式における xy^4 の項の係数は ケコサシ

である。

PART3 多項式の除法

要点 ① 多項式の除法

整数の除法において

(割られる数)＝(割る数)×(商)＋(余り)

が成り立つ。

例えば，121 を 5 で割ると，商は 24，余りは 1 であることより

121＝

と表される。このとき，(余り)＜(割る数) である。

多項式を多項式で割る計算を，整数の割り算と似た方法で行う。

例　$2x^2+7x+9$ を $x+2$ で割る

$$x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9}$$

$2x^2+7x+9$ の最高次の項 $2x^2$ と $x+2$ の最高次の項 x に注目し，x に何を掛けると $2x^2$ になるかを考える。

$$\begin{array}{rl} x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} & \\ \underline{2x^2+4x} & \cdots(x+2)\times 2x \\ 3x+9 & \end{array}$$

$x+2$ に　　を掛けたものを計算し，$2x^2+7x+9$ から引くと，余りは $3x+9$

$$\begin{array}{r} 2x \\ x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} \\ \underline{2x^2+4x} \\ 3x+9 \end{array}$$

$3x+9$ の最高次の項 $3x$ と，$x+2$ の最高次の項 x に注目し，x に何を掛けると $3x$ になるかを考える。

$$\begin{array}{rl} 2x\ +3 & \\ x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} & \\ \underline{2x^2+4x} & \\ 3x+9 & \\ \underline{3x+6} & \cdots(x+2)\times 3 \\ 3 & \end{array}$$

$x+2$ に 3 を掛けたものを計算し，$3x+9$ から引くと，余りは 3。この 3 は，割る式 $x+2$ より次数が低いため，これ以上計算を続けることはできない。

よって，$2x^2+7x+9$ を $x+2$ で割ったときの

商は $2x+3$，余りは 3

である。この結果より

$2x^2+7x+9=$

が成り立つ。

一般に，以下のことが成り立つ。

除法の原理（多項式）

多項式 A を多項式 B で割った商を Q，余りを R とすると

$A=BQ+R$　　　R は 0 か，B より低い次数

を満たす多項式 Q，R がただ1つに定まる。

つまり，多項式の除法において

（割られる式）＝（割る式）×（商）＋（余り）

が成り立つ。

$A=BQ+R$ において，$R=0$ すなわち $A=BQ$ のとき，A は B で「　　　　」という。また，このとき，B は A の「　　」であるという。

3　次の多項式 A を多項式 B で割ったときの商と余りを求めよ。

(1)　$A=3x^2+x+2$，$B=x-3$　　(2)　$A=x^3+6x^2-5$，$B=x+4$

Point Pickup

多項式の除法

多項式 A を多項式 B で割る計算の手順は以下。

①　A，B を，それぞれ降べきの順に並べる。

②　割られる式 A に「欠けている次数の項」があれば，その部分をあけておく。

③　余りが 0 になるか，余りの次数が割る式 B の次数より低くなるまで割り算を行う。

第 1 講　PART3 確認問題

次の多項式 A を多項式 B で割ったときの商と余りを求めよ。

1 $A=2x^2+9x+7$，$B=x+4$

商　[ア]$x+$[イ]

余り　[ウ]

2 $A=x^3-x^2+4$，$B=x-3$

商　x^2+[エ]$x+$[オ]

余り　[カキ]

PART4 分数式の計算

要点① 分数式

「分数式」… $\frac{1}{x}$, $\frac{2x^2+3x+1}{x+1}$ などのように，2つの多項式 A, B を用いて $\frac{A}{B}$ の形で表され，

B に文字を含む式。分数式 $\frac{A}{B}$ において，B を分母，A を分子という。

※多項式と分数式を合わせて「有理式」という。

分数では，分母と分子に0以外の同じ数を掛けても，分母と分子を0以外の同じ数で割っても，もとの分数と等しい。

$$\frac{6}{8}=\frac{3\times2}{4\times2}=\frac{3}{4}$$

同様に，分数式では，分母と分子に0以外の同じ多項式を掛けても，分母と分子を共通な因数で割っても，もとの分数式に等しい。すなわち，次の式が成り立つ。

$$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}\quad (ただし\ C\neq0)$$

分数式の分母と分子を，その共通因数で割ることを，「　　」するという。

また，それ以上約分できない分数式を，「　　　　」という。

要点② 分数式の乗法・除法

分数式の乗法・除法は，分数と同様に行う。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

分数式の計算結果は，既約分数式にしておく。

例 $\frac{x-2}{x+1}\times\frac{x+3}{x-2}=$　　　　　　$=$

要点 ③　分数式の加法・減法

分母が等しい分数式の加法・減法は，分数と同様に行う。

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

分母が異なる分数式の加法，減法は，各分数式の分母と分子に適当な多項式を掛けて，分母を同じ多項式にしてから行う。

例　$\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x+3}=$　　　　　　　　$=$　　　　　　　　$=$

2 つ以上の分数式の分母を同じ多項式にすることを，分数式を「　　」するという。

4 (1) 次の分数式を約分し，既約分数式で表せ。

(i) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$　　(ii) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10}$

(2) 次の式を計算せよ。

(i) $\dfrac{x^2-x}{x^2-3x-4} \div \dfrac{x-1}{x-4}$　　(ii) $\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{2}{x^2+2x}$

Point Pickup

分数式の計算

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}\qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

・分数式は，それ以上約分できない形(既約分数式)にする。

・四則計算の前に，それぞれの分数の分母，分子を「因数分解」できないか確かめる。
　それにより，共通因数を見つけ，約分や通分を行う。

第 1 講　PART4 確認問題

次の分数式を約分し，既約分数式で表せ。

1　$\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}=\dfrac{x}{x-\boxed{\text{ア}}}$

2　$\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+\boxed{\text{イ}}}{x-\boxed{\text{ウ}}}$

次の式を計算せよ。

3　$\dfrac{x^2+x}{x^2+x-6}\div\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{x}{x+\boxed{\text{エ}}}$

4　$\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{3}{x^2+3x}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\left(x-\boxed{\text{カ}}\right)\left(x+\boxed{\text{キ}}\right)}$

第 2 講　式と証明

PART1　恒等式

要点 ①　恒等式

「方程式」… 含まれている文字に，ある特定の値を代入したときだけ成り立つ等式

「恒等式」… 含まれている文字に，どのような値を代入しても成り立つ等式

例　$(x+3)(x-2)=0$　…　方程式

$(x+3)(x-2)=x^2+x-6$　…　恒等式

展開や因数分解の公式など，式の変形によって両辺が同じ式になる等式は，すべて恒等式である。

a，b，c を定数とするとき，等式 $ax^2+bx+c=3x^2+4x+5$ が x についての恒等式であるための条件を考える。この等式が x についての恒等式ならば，x にどのような値を代入しても成り立つ。よって，$x=0$，1，-1 を代入すると

$$c=5,\ a+b+c=12,\ a-b+c=4$$

この連立方程式を解くと，$a=3$，$b=4$，$c=5$ である。

逆に，$a=3$，$b=4$，$c=5$ のとき，明らかにこの等式は x についての恒等式である。

一般に，次のことが成り立つ。

恒等式の性質

多項式 $P(x)$ と $Q(x)$ について

$P(x)=Q(x)$ が x についての恒等式　$\Leftrightarrow$　$P(x)$ と $Q(x)$ の同じ次数の項の係数が一致

$P(x)=0$ が x についての恒等式　$\Leftrightarrow$　$P(x)$ の各項の係数がすべて 0

特に，x の 2 次式について

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式　$\Leftrightarrow$　$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式　$\Leftrightarrow$　$a=0$，$b=0$，$c=0$

※一般に，$P(x)$ と $Q(x)$ が x についての n 次(以下)の多項式であるとき，等式 $P(x)=Q(x)$ が $n+1$ 個の異なる x の値に対して成り立つならば，この等式は x についての恒等式である。

【MEMO】

1 等式 $2x^2-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

Point Pickup

恒等式の係数を決定する

同類項をまとめ，両辺の同じ次数の項の係数を「＝」で結ぶ。

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式　⇔　$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

第 2 講 PART1 確認問題

1 等式 $3x^2+8x+2=a(x+1)^2+b(x+1)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$a=$ [ア]，$b=$ [イ]，$c=$ [ウエ]

PART2 等式の証明

要点 ① 等式の証明

等式 $A=B$ を証明するということは，この等式が「　　　」であることを示すことである。
等式 $A=B$ を証明するとき，以下のいずれかの方法が代表的な解法である。

等式 $A=B$ の証明

1　A を変形して B を導く，または B を変形して A を導く。

2　A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。

3　$A-B=0$ であることを導く。

例　等式 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$ を証明する。

1 の方法を用いると

$$(\text{右辺})=a^2-2ab+b^2+4ab=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(\text{左辺})$$

よって　$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

要点 ② 条件つきの等式の証明

ここでは，ある条件のもとで常に成り立つ等式を証明する。

例　$a+b=2$ のとき，等式 $a^2+2b=b^2+2a$ を証明する。

$a+b=2$ のとき　$b=$

このとき

$$(\text{左辺})=a^2+2(-a+2)=a^2-2a+4$$

$$(\text{右辺})=(-a+2)^2+2a=a^2-4a+4+2a=a^2-2a+4$$

よって　$a^2+2b=b^2+2a$

要点 ③ 比例式

$a:b=c:d$ のとき，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ である。

このように，「比の値」が等しいことを示す式を「　　　　」という。

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

のように比例式を「　　」とおくことにより，$a=$　　，$c=$　　のように，複数の文字を共通の文字 k で表すことができる。

2 次の等式を証明せよ。

(1) $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

(2) $a+b+c=0$ のとき，$a^2+b^2=c^2-2ab$

(3) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

Point Pickup

等式 $A=B$ の証明

1 A を変形して B を導く，または B を変形して A を導く。

2 A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。

3 $A-B=0$ であることを導く。($A-B$ を計算して 0 になる。)

条件つきの等式の証明

条件式を用いて，文字を減らして進める。

条件式が比例式の場合は，(比例式)$=k$ とおくとよい。

第 2 講　PART2 確認問題

1　次の等式を証明せよ。

$$x^4-16=(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$$

[証明]

$$(\text{右辺})=x^4+2x^3+\boxed{\text{ア}}x^2+8x-\boxed{\text{イ}}x^3-4x^2$$
$$-\boxed{\text{ウ}}x-\boxed{\text{エオ}}$$
$$=x^4-\boxed{\text{カキ}}=(\text{左辺})$$

よって　$x^4-16=(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$

2　$a-b+2c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$b^2-2ac=4c^2+ab$$

[証明]

$a-b+2c=0$ より

$$a=b-\boxed{\text{ク}}c$$

このとき

$$(\text{左辺})=b^2-\boxed{\text{ケ}}(b-\boxed{\text{ク}}c)c$$
$$=b^2-\boxed{\text{コ}}bc+\boxed{\text{サ}}c^2$$
$$(\text{右辺})=4c^2+(b-\boxed{\text{シ}}c)b$$
$$=4c^2+b^2-\boxed{\text{シ}}bc$$
$$=b^2-\boxed{\text{シ}}bc+4c^2$$

よって　$b^2-2ac=4c^2+ab$

3 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a+2c}{b+2d}$$

ただし，[ス] ～ [ト] は，下の①～⑥のうちから選べ。

[証明]

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと

$$a=\boxed{ス},\ c=\boxed{セ}$$

このとき

$$(\text{左辺})=\frac{\boxed{ソ}-\boxed{タ}}{b-d}$$

$$=\frac{k(b-d)}{b-d}=\boxed{チ}$$

$$(\text{右辺})=\frac{\boxed{ツ}+2\boxed{テ}}{b+2d}$$

$$=\frac{\boxed{ト}(b+2d)}{b+2d}=k$$

よって　$\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a+2c}{b+2d}$

[選択肢]

① ak　② bk　③ ck

④ dk　⑤ k　⑥ $2k$

[MEMO]

PART3 不等式の証明

要点 ① 実数の大小関係

2 つの実数 a，b について，a　b，a　b，a　b のいずれか 1 つの関係だけが成り立つ。

実数の大小関係について，次の性質が成り立つ。

実数の大小関係①

1　$a>b$，$b>c$　$\Rightarrow$　$a>c$

2　$a>b$　$\Rightarrow$　$a+c>b+c$，$a-c>b-c$

3　$a>b$，$c>0$　$\Rightarrow$　$ac>bc$，$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

　$a>b$，$c<0$　$\Rightarrow$　$ac<bc$，$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

2 より，実数の大小関係について，次の性質が成り立つ。

実数の大小関係②

4　$a>b$　$\Leftrightarrow$　$a-b>0$

5　$a<b$　$\Leftrightarrow$　$a-b<0$

4 の証明

$a>b$　$\Rightarrow$　$a-b>b-b$　すなわち　$a-b>0$

$a-b>0$　$\Rightarrow$　$a-b+b>0+b$　すなわち　$a>b$

よって　$a>b$　$\Leftrightarrow$　$a-b>0$

4 を，不等式の証明に用いることができる。

不等式 $A>B$ の証明

不等式 $A>B$ を証明するとき，$A-B>0$ が成り立つことを示してもよい。

例　$a>b$ のとき，不等式 $4a+3b>2a+5b$ を証明する。

$$=4a+3b-2a-5b=2a-2b=$$

$a>b$ より

よって $2(a-b)>0$

したがって，$(4a+3b)-(2a+5b)>0$ より，$4a+3b>2a+5b$

要点② 実数の平方

実数の大小関係から，$a>0 \Rightarrow a^2>0$，$a<0 \Rightarrow a^2>0$ がいえる。

また，$a=0 \Leftrightarrow a^2=0$ である。

よって，実数の平方について，次の性質が成り立つ。

実数の平方の性質

実数 a について　$a^2 \geqq 0$

等号が成立するのは，$a=0$ のときである。

このことを，不等式の証明に用いることができる。

例　x，y が実数のとき，不等式 $x^2+y^2 \geqq 2xy$ を証明する。

$$(x^2+y^2)-2xy=x^2-2xy+y^2=$$

よって $x^2+y^2 \geqq 2xy$

等号が成り立つのは，　　　　　，つまり $x=y$ のときである。

3 (1) $a>1$，$b>1$ のとき，不等式 $ab+1>a+b$ を証明せよ。

(2) x，y が実数のとき，不等式 $9x^2+y^2 \geqq -6xy$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

Point Pickup

不等式 $A>B$ の証明

$A-B>0$ を示す。つまり，$A-B$ を計算し，その結果が正であることを示す。
正であることを示すときには，主に次の性質が用いられる。

(正)＋(正)＝(正)　　(正)×(正)＝(正)　　(負)×(負)＝(正)

実数の平方の性質

実数 a について　$a^2 \geqq 0$　(等号成立は $a=0$ のとき)

第 2 講　PART3 確認問題

1　$a>1$，$b>2$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$ab+2>2a+b$$

[証明]

$$(ab+2)-(2a+b)$$
$$=ab+2-2a-b$$
$$=\left(a-\boxed{ア}\right)b-\boxed{イ}(a-1)$$
$$=\left(a-\boxed{ウ}\right)\left(b-\boxed{エ}\right)$$

$a>1$，$b>2$ より

$$\left(a-\boxed{ウ}\right)\left(b-\boxed{エ}\right)>0$$

したがって

$$ab+2>2a+b$$

2　x，y が実数のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$x^2+25y^2 \geqq 10xy$$

[証明]

$$\left(x^2+25y^2\right)-10xy=x^2-10xy+25y^2$$
$$=\left(x-\boxed{オ}y\right)^2 \geqq \boxed{カ}$$

よって

$$x^2+25y^2 \geqq 10xy$$

等号が成り立つのは

$$x-\boxed{キ}y=0$$

つまり $x=\boxed{ク}y$ のときである。

PART4 平方の大小関係

要点 ① 正の数の大小と平方の大小

$a>0$，$b>0$ のとき，a^2 と b^2 の大小関係を考える。

$$a^2>b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2-b^2>0$$

であるから，a^2-b^2 の符号を考える。

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$a>0$，$b>0$ より，$a+b>0$ であるから，a^2-b^2 と $a-b$ の符号は一致する。つまり

$$a^2-b^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad a-b>0 \quad \Leftrightarrow \quad a>b$$

であるから，次のことが成り立つ。

正の数の大小と平方の大小

$a>0$，$b>0$ のとき

$$a>b \quad \Leftrightarrow \quad a^2>b^2 \qquad\qquad a \geqq b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \geqq b^2$$

※上記は $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のときも成り立つ。

このことを，不等式の証明に用いることができる。

平方の大小を用いた不等式 $A>B$ の証明

$A>0$，$B>0$ ならば，不等式 $A>B$ を証明するとき，$A^2>B^2$ が成り立つことを示してもよい。

例　$a>0$ のとき，不等式 $a+2>2\sqrt{a+1}$ が成り立つことを証明する。

両辺の　　　　を考えると

$$=(a^2+4a+4)-4(a+1)=a^2$$

$a>0$ であるから $a^2>0$

よって　$(a+2)^2>(2\sqrt{a+1})^2$

$a+2>0$，$2\sqrt{a+1}>0$ であるから　$a+2>2\sqrt{a+1}$

[MEMO]

4 $a>0$ のとき，不等式 $1+\sqrt{a}>\sqrt{1+a}$ を証明せよ。

Point Pickup

不等式 $A>B$ の証明（$A^2-B^2>0$ の利用）

$A>0$，$B>0$ ならば，A^2-B^2 を計算し，その結果が正であることを示してもよい。

第 2 講　PART4 確認問題

1　$a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{a}+2>\sqrt{a+4}$$

［証明］

両辺の平方の差を考えると

$$(\sqrt{a}+2)^2-(\sqrt{a+4})^2$$

$$=\left(a+\boxed{\text{ア}}\sqrt{a}+4\right)-\left(a+\boxed{\text{イ}}\right)$$

$$=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{a}$$

$a>0$ であるから

$$\boxed{\text{ウ}}\sqrt{a}>\boxed{\text{エ}}$$

よって

$$(\sqrt{a}+2)^2>(\sqrt{a+4})^2$$

$\sqrt{a}+2>0$，$\sqrt{a+4}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+2>\sqrt{a+4}$$

PART5 相加平均と相乗平均

要点① 相加平均と相乗平均の大小関係

2 つの実数 a，b について，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の「　　　　」という。

また，$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ を a と b の「　　　　」という。

例　2 数 7 と 28 について

相加平均は　　　　$=\dfrac{35}{2}$　　　相乗平均は　　　　$=\sqrt{7\cdot 7\cdot 2^2}=14$

一般に，相加平均と相乗平均には，次の大小関係が成り立つ。

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のとき

（証明）

$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}$ と $\sqrt{ab}$ の平方の差を考えると

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{\qquad}{4}$$

よって　$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geqq(\sqrt{ab})^2$

$\dfrac{a+b}{2}>0$，$\sqrt{ab}>0$ であるから，$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

等号が成り立つのは　　　　　，すなわち $a=b$ のときである。

$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　$\Leftrightarrow$　$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ であり，不等式の証明においては，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ の形で用いられることが多い。

※$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ は $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のときも成り立つ。

[MEMO]

5　$x>0$ のとき, 不等式 $x+\dfrac{4}{x}\geqq 4$ を証明せよ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか。

Point Pickup

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$, $b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　…　(相加平均) ≧ (相乗平均)

等号成立は $a=b$ のときである。

また, $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ は $a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ の形で用いられることが多い。

第 2 講　PART5 確認問題

1　$x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqq 2$$

［証明］

$\frac{x}{2}>0$，$\frac{2}{x}>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqq \boxed{\text{ア}}\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}}$$

よって　$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqq \boxed{\text{イ}}$

等号が成り立つのは

$$\frac{x}{2}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{x}$$

つまり $x^2=\boxed{\text{エ}}$ のときで，$x>0$ より $x=\boxed{\text{オ}}$ のとき

である。

第 3 講　複素数と 2 次方程式

PART1 複素数とその計算

要点 ① 数の範囲の拡張と虚数単位

2 次方程式 $x^2=3$ は，有理数の範囲では解をもたない。しかし，その範囲を実数まで広げると，$x=\pm\sqrt{3}$ という無理数の解をもつ。

x が実数のとき，$x^2\geqq 0$ である。よって，2 次方程式 $x^2=-3$ は，実数の範囲では解をもたないことがわかる。

ここでは，2 次方程式が常に解をもつように，数の範囲を拡張する。

2 乗すると -1 になる新しい数を考え，その数を文字「　」で表す。

つまり

$$i^2=-1$$

とする。この i を「虚数単位（きょすう）」という。これを定義することで，負の数の平方根，すなわち，「2 乗すると負の数」になる数を扱うことができるようになる。

要点 ② 複素数，複素数の相等

「　　　」… a，b を実数として，　　　　の形で表される数

複素数 $a+bi$ において，a を「　　」，b を「　　」という。

例　$3-4i$ の実部は　，虚部は

複素数 $a+bi$ において，$b=0$，すなわち虚部が 0 のとき，$a+0i=a$ は実数を表す。

$b\neq 0$ のとき，複素数 $a+bi$ を「　　」という。

特に，$a=0$，$b\neq 0$ のとき，複素数 $0+bi=bi$ を「　　　」という。

〈複素数$a+bi$〉

$b=0$	$b\neq 0$
実数　a	虚数　$a+bi$ 純虚数　bi

2つの複素数が等しいのは，「実部と虚部が共に等しいとき」と定める。

複素数の相等

a，b，c，d を実数とする。

$a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$

特に $a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

例 $x+yi=-2+3i$ を満たす実数 x，y は　$x=$　　，$y=$

※虚数を扱うときは，数の大小関係や正負は考えない。

要点③ 複素数の計算

複素数の加法，減法は，虚数単位 i を文字のように扱い，実部，虚部それぞれについて和，差を求める。

例 $(1+2i)+(3-4i)=$　　　$+$　　　$=$

$(1+2i)-(3-4i)=$　　　$+$　　　$=$

複素数の乗法は，虚数単位 i を文字のように扱って計算するが，　　が出てきたときには，それを　　におき換える。

例 $(1+2i)(3-4i)=1\cdot3+1\cdot(-4)i+2\cdot3i+2\cdot(-4)i^2$

$=3-4i+6i+(-8)$　　　$=$

2つの複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を，互いに「　　　　　　」という。

互いに共役な複素数 $a+bi$ と $a-bi$ の和と積は

$(a+bi)+(a-bi)=$

$(a+bi)(a-bi)=$　　　　　$=$

となり，ともに実数である。

複素数の除法は，分母と共役な複素数を分母と分子に掛けることで，分母を実数にする。

例 $\dfrac{3-4i}{1+2i}=\dfrac{(3-4i)}{(1+2i)}=\dfrac{3-6i-4i+8i^2}{1-4i^2}=\dfrac{\quad}{\quad}=-\dfrac{5}{5}-\dfrac{10}{5}i=-1-2i$

※実数 a と共役な複素数は，a である。

1 (1) 次の計算をせよ。

(i) $(3+2i)-(2-4i)$　(ii) i^3+i^2+i+1　(iii) $(2-i)(3+5i)$

(2) 次の式を計算せよ。

(i) $\dfrac{4}{2+3i}$　(ii) $\dfrac{2i}{1-i}$

Point Pickup

複素数の加法，減法，乗法

虚数単位 i を文字のように扱い，また $i^2=-1$ であることを用いて計算する。

計算結果は $a+bi$（a，b は実数）の形にする。

複素数の除法

分母と共役な複素数を分母と分子に掛け，分母を実数にする。

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

第 3 講 PART1 確認問題

次の計算をせよ。

1 $(4+3i)-(2+5i)=$ ア $-$ イ i

2 $1+i-i^2+i^3=$ ウ

3 $(3-i)(4+3i)=$ エオ $+$ カ i

次の式を計算せよ。

4 $\dfrac{5}{1+2i}=$ キ $-$ ク i

5 $\dfrac{2i}{3-i}=-\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}+\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}i$

PART2 負の数の平方根と 2 次方程式

要点 ① 負の数の平方根

数の範囲を複素数まで広げると，負の数の平方根を考えることができる。

正の数 3 の平方根は　　と　　　であり，$(\sqrt{3})^2=3$，$(-\sqrt{3})^2=3$ である。

$i^2=$　　より

$$(\sqrt{3}\,i)^2=(\sqrt{3})^2 i^2=\quad,\ (-\sqrt{3}\,i)^2=(-\sqrt{3})^2 i^2=$$

であるから，$\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{3}\,i$ は負の数 -3 の平方根である。

また，-3 の平方根は $\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{3}\,i$ のみであり，これら以外にない。

正の数 a の平方根は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ であるが，a が負のときにもこの表し方を適用すると，-3 の平方根は　　　と　　　　と表すことができる。このことにより

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i,\ -\sqrt{-3}=-\sqrt{3}\,i$$

と考えることができる。

$a>0$ のとき，記号 $\sqrt{-a}$ について，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ と定めると，次のことがいえる。

負の数の平方根

$a>0$ のとき

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i \qquad 特に\quad \sqrt{-1}=i$$

$-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$

例　$\sqrt{-2}=$　　，$-\sqrt{-8}=$　　　　$=$

-5 の平方根は　　　　$=$

負の数の平方根 $\sqrt{-a}\ (a>0)$ を含む計算においては，$\sqrt{-a}$ を $\sqrt{a}\,i$ の形にしてから計算する。

要点② 2次方程式の解

複素数の範囲においては，実数 k の平方根は，k の符号に関わらず $\pm\sqrt{k}$ である。よって，2次方程式 $x^2=k$ の解は，k の符号に関わらず $x=\pm\sqrt{k}$ となる。

例　方程式 $x^2=-7$ の解は　$x=$

また，数学Ⅰで学んだ，2次方程式の解の公式は，　　　　の符号に関わらず成り立つ。

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

特に $b=2b'$ のとき，2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

例　2次方程式 $2x^2+3x+4=0$ の解は

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm\sqrt{-23}}{4}$$

今後は，特に断りがない場合，方程式の係数はすべて実数とし，方程式の解は複素数の範囲で考えるものとする。

2 (1) 次の計算をせよ。

(i) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}$　　(ii) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

(2) 次の 2 次方程式を解け。

(i) $x^2=-9$　　(ii) $7x^2-2x+1=0$

Point Pickup

負の数の平方根

$a>0$ のとき　$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　　特に　$\sqrt{-1}=i$

負の数の平方根　$\sqrt{-a}$ $(a>0)$ を含む計算においては，$\sqrt{-a}$ を $\sqrt{a}\,i$ の形にする。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解法

① 左辺の因数分解を試みる。

② $x^2=k$（k は定数）の解は，k の符号に関わらず　$x=\pm\sqrt{k}$

③ 解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

特に，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

第 3 講　PART2 確認問題

1 $\sqrt{-2}\sqrt{-3} =$ [ア]

① $\sqrt{6}$　② $-\sqrt{6}$
③ $\sqrt{6}\,i$　④ $-\sqrt{6}\,i$

2 $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}} =$ [イ]

① -2　② $\pm 2i$
③ $2i$　④ $-2i$

3 2 次方程式 $x^2 = -4$ の解は，$x =$ [ウ] である。

① -2　② ± 2
③ $\pm 2i$　④ $-i$

4 2 次方程式 $2x^2 - 6x + 7 = 0$ の解は，

$x = \dfrac{\boxed{エ} \pm \sqrt{\boxed{オ}}\,i}{\boxed{カ}}$ である。

PART3　2次方程式の解の判別

要点①　2次方程式の解の種類と判別式

方程式の解のうち，実数であるものを「　　　」，虚数であるものを「　　　」という。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

この解の種類は，根号の中の式 b^2-4ac の符号によって，次の①～③に分類することができる。

① b^2-4ac　　　のとき，異なる2つの　　解

② b^2-4ac　　　のとき，ただ1つの　　解(　　)

③ b^2-4ac　　　のとき，異なる2つの　　解

b^2-4ac を，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の「　　　」といい，記号「　」で表す。

2次方程式の解の種類の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解と判別式 $D=b^2-4ac$ について，次のことが成り立つ。

$D>0$　⇔　異なる2つの実数解をもつ

$D=0$　⇔　重解をもつ

$D<0$　⇔　異なる2つの虚数解をもつ

※2次方程式の異なる2つの虚数解は，互いに共役な複素数である。

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式は

$$D=(2b')^2-4ac=4\left(b'^2-ac\right)$$

であるから，解の判別の際に，D の代わりに

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

を用いてもよい。

[MEMO]

3 (1) 次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

(i) $2x^2-3x+4=0$　　(ii) $3x^2+4x-1=0$

(iii) $x^2+2\sqrt{3}\,x+3=0$

(2) 2 次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ が実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の判別

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について

$D>0$ ⇔ 異なる 2 つの実数解をもつ

$D=0$ ⇔ 重解をもつ

$D<0$ ⇔ 異なる 2 つの虚数解をもつ

特に $b=2b'$ のときは，D の代わりに $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい。

2 次方程式が実数解をもつ条件

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

実数解をもつ ⇔ $D\geqq 0$

第3講　PART3 確認問題

次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

1　2次方程式 $2x^2+5x+1=0$ は，[ア]。

①　異なる2つの実数解をもつ
②　重解をもつ
③　異なる2つの虚数解をもつ

2　2次方程式 $x^2-3x+6=0$ は，[イ]。

①　異なる2つの実数解をもつ
②　重解をもつ
③　異なる2つの虚数解をもつ

3　2次方程式 $4x^2+4x+1=0$ は，[ウ]。

①　異なる2つの実数解をもつ
②　重解をもつ
③　異なる2つの虚数解をもつ

4　2次方程式 $x^2+ax-a+3=0$ が虚数解をもつとき，定数 a の値の範囲は，[エオ] $<a<$ [カ] である。

PART4 2次方程式の解と係数の関係

要点① 2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

ここで，$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とすると

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\quad}{\quad}=$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=$$

となる。

このように，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解の和 $\alpha+\beta$ と積 $\alpha\beta$ はともに実数となり，方程式の係数 a，b，c で表される。

> **2次方程式の解と係数の関係**
>
> 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると
>
> $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\qquad\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

例 2次方程式 $3x^2-4x-5=0$ の2つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{\quad}{\quad}=\qquad,\ \alpha\beta=\frac{\quad}{\quad}=$$

解と係数の関係は，$\alpha=\beta$，すなわち解が重解のときにも成り立つ。

要点② 2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とするとき，解と係数の関係を用いると

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\quad x+\quad\right)=a\{x^2\qquad x+\quad\}=a(x\qquad)(x\qquad)$$

よって，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解 α，β を用いて，2 次式 ax^2+bx+c を因数分解することができる。

2 次式の因数分解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

例　2 次式 x^2-4x+7 を複素数の範囲で因数分解する。

2 次方程式 $x^2-4x+7=0$ の解は

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 7}}{1}=2\pm\sqrt{-3}=2\pm\sqrt{3}\,i$$

よって

$$x^2-4x+7=\{x-(2+\sqrt{3}\,i)\}\{x-(2-\sqrt{3}\,i)\}=(x-2-\sqrt{3}\,i)(x-2+\sqrt{3}\,i)$$

要点 ③　2 数を解とする 2 次方程式

2 数 α，β を解とする 2 次方程式は

$$=0 \qquad (a\neq 0)$$

の形で表される。このうち，x^2 の係数 a が 1 のものは

$=0$　すなわち　$=0$ と表される。

よって，次のことが成り立つ。

2 数 α，β を解とする 2 次方程式

2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

例　2 数 3，-1 を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作る。

2 数 3，-1 の

は $3+(-1)=2$　は $3\cdot(-1)=-3$

よって x^2　x　$=0$

4 (1) 2次方程式 $x^2-x-5=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i) $\alpha+\beta$　(ii) $\alpha\beta$　(iii) $\alpha^2+\beta^2$　(iv) $\alpha^3+\beta^3$

(2) 2次式 $2x^2+6x+3$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3) 2数 $-1+4i$，$-1-4i$ を解にもつ2次方程式を1つ作れ。

Point Pickup

2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α, β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

対称式

a^2+b^2 のように，a と b を入れ替えてももとの式と変わらない式を，a，b の「対称式」という。a，b の対称式は，基本対称式 $a+b$，ab で表すことができる。

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ より

$$a^2+b^2=$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ より

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=$$

2数 α，β を解とする2次方程式

2数 α，β を解とする2次方程式の1つは

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \cdots \quad x^2-(2\text{数の和})x+(2\text{数の積})=0$$

第 3 講　PART4 確認問題

1　2 次方程式 $2x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad \alpha\beta=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

である。

2　2 次方程式 $x^2+2x-1=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{オ}$$

である。

3　2 次方程式 $x^2+x+3=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha^3+\beta^3=\boxed{カ}$$

である。

4　2 次式 $3x^2-4x-1$ を複素数の範囲で因数分解すると

$$3x^2-4x-1$$
$$=\boxed{キ}\left(x-\frac{\boxed{ク}+\sqrt{\boxed{ケ}}}{3}\right)\left(x-\frac{\boxed{ク}-\sqrt{\boxed{ケ}}}{3}\right)$$

である。

5　2 数 $2+i$，$2-i$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-\boxed{コ}x+\boxed{サ}=0$$

である。

第 4 講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

PART1 剰余の定理

要点 ① 剰余の定理

x についての多項式を $P(x)$，$Q(x)$ などと書く。また，多項式 $P(x)$ の x に，ある数 k を代入したときの値を $P(k)$ と書く。

例　$P(x)=x^2+3x-4$ のとき，$P(2)=2^2+3\cdot2-4=6$

$P(x)=x^2+3x-4$ について，$P(x)$ を $x-2$ で割ると，

$$\begin{array}{r} x+5 \\ x-2\,\overline{)\,x^2+3x-4} \\ \underline{x^2-2x} \\ 5x-4 \\ \underline{5x-10} \\ 6 \end{array}$$

商は $x+5$，余りは 6 である。このことから，除法の原理により

$P(x)=$

と表される。この等式の両辺に $x=$　を代入すると

$P(\ \ )=\ \ \cdot7+6=6$

となり，この値は，$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余り 6 に等しい。

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを R とすると, R は　　であり，除法の原理により

$P(x)=$

と表される。この等式の両辺に $x=$　を代入すると

$P(\ \ )=\ \ \cdot Q(\ \ )+R=R$

となり，この値は，$P(x)$ を $x-k$ で割ったときの余り R に等しい。

よって，以下の定理が成り立つ。

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは $P(k)$ である。

この剰余の定理を用いると，多項式を 1 次式で割ったときの余りを，実際に割り算をすることなく求めることができる。

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると

$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$

と表される。ここで，$ax+b=0$ となる x は $x=-\dfrac{b}{a}$ であるから，多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ である。

[MEMO]

1　多項式 $P(x)=x^3+3x^2-2x+4$ を次の 1 次式で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$x-1$　　(2)　$x+3$　　(3)　$2x-1$

Point Pickup

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは $P(k)$

この定理を用いて，多項式を 1 次式で割ったときの余りを求めることができる。

また，多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

第 4 講　PART1 確認問題

多項式 $P(x)=x^3+2x^2-3x+1$ を次の 1 次式で割ったときの余りを求めよ。

1 $x-1$

余り [ア]

2 $x+2$

余り [イ]

3 $2x-1$

余り $\dfrac{[ウ]}{[エ]}$

PART2 因数定理

要点① 因数定理

多項式 $P(x)$ を1次式 $x-k$ で割ったときの余りが0，つまり $x-k$ で割り切れるとき，剰余の定理により　　　　　である。また，このとき

$$P(x)=(x-k)Q(x)$$

と表されることにより，$x-k$ は $P(x)$ の「　　」であることがわかる。

よって，以下の定理が成り立つ。

因数定理

多項式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ　$\Leftrightarrow$　$P(k)=0$

例 $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ について

$$P(2)=2^3-4\cdot 2^2+2+6=$$

よって，多項式 $P(x)$ は　　　　を因数にもつ。

また

$$P(1)=1^3-4\cdot 1^2+1+6=4$$

より，多項式 $P(x)$ は　　　　を因数にもたない。

因数定理を用いると，3次式やそれ以上の次数の式を因数分解することができる。

例 $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ について，$P(2)=0$ より，多項式 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-2$ で割ると，商は x^2-2x-3

よって

$$P(x)=$$

$$=(x-2)(x+1)(x-3)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x\ -3 \\ \hline
x-2 & x^3-4x^2+\ x+6 \\
 & x^3-2x^2 \\ \hline
 & \quad -2x^2+\ x \\
 & \quad -2x^2+4x \\ \hline
 & \qquad\quad -3x+6 \\
 & \qquad\quad -3x+6 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

【MEMO】

2　因数定理を用いて，$2x^3+9x^2-6x-5$ を因数分解せよ。

Point Pickup

因数定理を用いた因数分解

因数定理

多項式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ　$\Leftrightarrow$　$P(k)=0$

を用いて，多項式 $P(x)$ を因数分解する手順は以下。

① $P(k)=0$ となる k を見つける。

k の値の候補は，$\pm\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$ である。

② $P(x)\div(x-k)$ を計算する。その商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x-k)Q(x)$$

と表される。

③ $Q(x)$ を因数分解する。

第 4 講　PART2 確認問題

1 因数定理を用いて $2x^3-5x^2-x+6$ を因数分解すると

$$(x+\boxed{\text{ア}})(x-\boxed{\text{イ}})(2x-\boxed{\text{ウ}})$$

となる。

PART3 組立除法と因数分解

要点① 組立除法と因数分解

3次式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を1次式 $x-k$ で割ったときの商を $Q(x)=Ax^2+Bx+C$，余りを R とする。除法の原理により，$P(x)=(x-k)Q(x)+R$，すなわち

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-k)\left(Ax^2+Bx+C\right)+R$$

が成り立つ。この等式の右辺を x について整理すると

$$Ax^3+(B-Ak)x^2+(C-Bk)x+(R-Ck)$$

これを左辺と係数比較して

$$A=a,\ B-Ak=b,\ C-Bk=c,\ R-Ck=d$$

つまり，$A=a$，$B=b+Ak$，$C=c+Bk$，$R=d+Ck$

これを図示すると，以下のようになる。

a	b	c	d
	Ak	Bk	Ck
A	B	C	R

これを用いると，多項式 $P(x)$ を1次式で割ったときの商と余りを求めることができる。

例　$2x^3-5x^2+3x+10$ を $x-2$，$x+1$ で割ったときの商と余りをそれぞれ求める。

2	−5	3	10	

商　　　　余り

2	−5	3	10	

商　　　　余り

この方法を「　　　　」という。

多項式 $P(x)$ を1次式 $x-k$ で割ったときの商 $Q(x)$ と余り R を求める簡便な方法として，この組立除法が用いられる。特に，$R=0$ になるとき，$P(x)$ は $x-k$ で割り切れる，すなわち，$x-k$ を因数にもち，$P(x)=(x-k)Q(x)$ の形で表される。

[MEMO]

3 組立除法を用いて，多項式 $x^3+x^2-21x-45$ を因数分解せよ。

Point Pickup

組立除法を用いた因数分解

① $P(x)$ を $x-k$ で割ったときの商 $Q(x)$ と余り R を組立除法で求める。

k の値の候補は，$\pm\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$ である。

② ①において $R=0$ のとき $P(x)=(x-k)Q(x)$ と表される。

③ $Q(x)$ を因数分解する。

第 4 講　PART3 確認問題

1　$P(x)=x^3-x^2-2x-12$ において，

$P(\boxed{ア})=0$ であるから，組立除法を使うと，次のようになる。

1	-1	-2	-12	$\boxed{ア}$
	$\boxed{ア}$	6	12	
1	$\boxed{イ}$	$\boxed{ウ}$	0	

よって

$$P(x)=(x-\boxed{エ})(x^2+\boxed{オ}x+\boxed{カ})$$

PART4 高次方程式の解法

要点 ① 高次方程式と因数分解による解法

x の多項式 $P(x)$ を n 次の多項式とするとき，$P(x)=0$ の形で表される方程式を，「　　　　　」という。特に，3 次以上の方程式を「高次方程式」という。

高次方程式 $P(x)=0$ を解くことは容易ではないが，$P(x)$ が 2 次以下の多項式の積に因数分解できれば解くことができる。

例 3 次方程式 $x^3=1$ を解く。

移項して $x^3-1=0$

左辺を因数分解すると　　　　　　　　$=0$

よって　$x-1=0$　または　$x^2+x+1=0$

したがって　$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

※ 3 乗して a になる数を，a の「3 乗根」(または「立方根」) という。

a の 3 乗根は，方程式 $x^3=a$ の解である。

x^4-4x^2+3 のように，4 次式のうち，3 次と 1 次の項がないなど，次数がすべて偶数の項の式を，「複 2 次式」という。複 2 次式の因数分解は，$x^2=t$ とおくと，2 次式の因数分解に帰着する。

要点 ② 高次方程式の解法 (因数定理)

ここでは，因数定理を用いて高次方程式を解く。

例 3 次方程式 $x^3-2x^2-5x+6=0$ を解く。

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とすると

$$P(1)=1^3-2\cdot1^2-5\cdot1+6=0$$

より，$P(x)$ は　　　を因数にもつ。

$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)$

$P(x)=0$ より　$x=1,\ -2,\ 3$

$$\begin{array}{r@{}l}
 & x^2\ -x\ -6 \\
x-1\,\big) & x^3-2x^2-5x+6 \\
 & x^3-\ x^2 \\ \hline
 & -x^2-5x \\
 & -x^2+\ x \\ \hline
 & -6x+6 \\
 & -6x+6 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

要点 ③ 重解

方程式 $(x-2)^2(x+3)=0$ の解は, $x=2$, -3 である。この解 $x=2$ を, この方程式の「　　　」という。また，方程式 $(x-1)^3=0$ の解 $x=1$ を，この方程式の「　　　」という。

2 重解を重なった 2 個の解，3 重解を重なった 3 個の解と考えると，複素数の範囲において，2 次方程式は常に 2 個，3 次方程式は常に 3 個の解をもつ。

一般に，複素数の範囲において，n 次方程式は n 個の解をもつことが知られている。

4 次の方程式を解け。

(1) $x^3+27=0$

(2) $x^4-3x^2-4=0$

(3) $x^3-3x^2-8x-4=0$

(4) $x^3+4x^2-3x-18=0$

Point Pickup

高次方程式 $P(x)=0$ の解法

・因数分解の公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を 1 次式または 2 次式の積の形に因数分解する。

・複 2 次式の因数分解は，$x^2=t$ とおくと，2 次式の因数分解に帰着する。

※特に断りがないときは，解は複素数の範囲で答える。

第 4 講　PART4 確認問題

次の方程式を解け。

1　$x^3+1=0$

$$x=\boxed{アイ},\ \frac{\boxed{ウ}\pm\sqrt{\boxed{エ}}\,i}{2}$$

2　$x^4+3x^2-4=0$

$$x=\pm\boxed{オ},\ \pm\boxed{カ}\,i$$

3　$x^3-4x^2+3x+2=0$

$$x=\boxed{キ},\ \boxed{ク}\pm\sqrt{\boxed{ケ}}$$

4　$x^3+3x^2-9x+5=0$

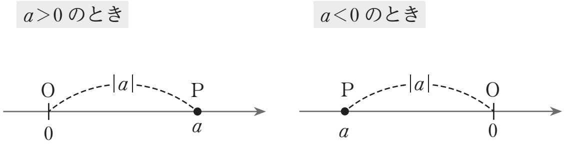
$$x=\boxed{コ},\ \boxed{サシ}$$

第 5 講　点と直線

PART1　2 点間の距離，数直線上の分点の座標

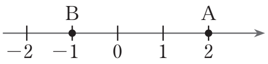
要点 ①　数直線上の 2 点間の距離

数直線上で，点 P に実数 a が対応しているとき，a を点 P の座標といい，座標が a である点 P を P(a) と表す。また，数直線上の原点 O と点 P(a) の距離を a の絶対値といい，$|a|$ と表す。



例　右図で A(　)，B(　　)

OA＝　　＝2，OB＝　　　＝1

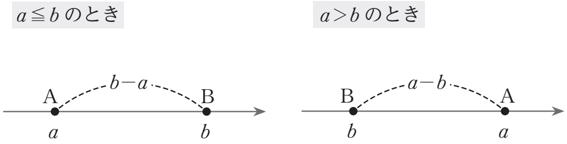


数直線上の 2 点A(a), B(b)間の距離 AB は

$a \leqq b$ のとき　AB＝$b-a$

$a > b$ のとき　AB＝$a-b$

である。よって，AB＝$|b-a|$ と表すことができる。

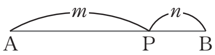


例　2 点 A(2)，B(−1) 間の距離は

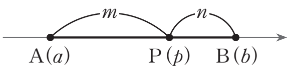
AB＝　　　　＝　　　＝3

要点 ②　数直線上の内分点・外分点の座標

m，n を正の数とする。線分 AB 上に点 P があり，AP：PB＝m：n が成り立つとき，点 P は線分 AB を m：n に内分するといい，点 P を「　　　　」という。



数直線上の 2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を m：n に内分する点 P の座標 p を求める。



$a<b$ のとき，$a<p<b$ より

$(p-a):(b-p)=m:n$　　$n(p-a)=m(b-p)$

よって　$p=\dfrac{na+mb}{m+n}$

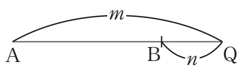
$a>b$ のときも，同様に $p=\dfrac{na+mb}{m+n}$ が導かれる。

とくに，$m=n$，つまり $m:n=1:1$ のとき，点 P は線分 AB の中点となり，その座標は

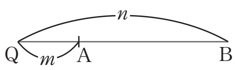
$p=\dfrac{1\cdot a+1\cdot b}{1+1}=\dfrac{a+b}{2}$ と表される。

m，n を異なる正の数とする。線分 AB の延長上に点 Q があり，AQ：QB＝$m:n$ が成り立つとき，点 Q は線分 AB を $m:n$ に外分するといい，点 Q を「　　　　」という。

$m>n$ のとき



$m<n$ のとき



数直線上の 2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を m:n に外分する点 Q の座標 q を求める。

・$m>n$ のとき

$a<b$ のとき，$a<b<q$ より

$$(q-a):(q-b)=m:n \qquad m(q-b)=n(q-a)$$

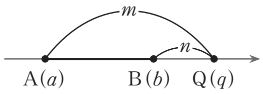
よって　　$q=\dfrac{-na+mb}{m-n}$

$a>b$ のときも，同様に $q=\dfrac{-na+mb}{m-n}$ が導かれる。

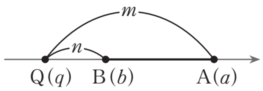
・$m<n$ のとき

$a<b$，$a>b$ に関わらず，$q=\dfrac{-na+mb}{m-n}$ が導かれる。

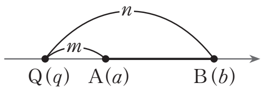
$m>n$，$a<b$ のとき



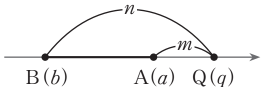
$m>n$，$a>b$ のとき



$m<n$，$a<b$ のとき



$m<n$，$a>b$ のとき



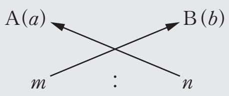
以上より，次のことが成り立つ。

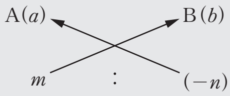
数直線上の内分点・外分点の座標

数直線上の点 A(a)，B(b) に対して

線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は $\dfrac{na+mb}{m+n}$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は $\dfrac{-na+mb}{m-n}$





例　2 点 A(3)，B(2) に対して

線分 AB を 2：1 に内分する点 P の座標は ＿＿＿＿＿＝

線分 AB を 5：3 に外分する点 Q の座標は ＿＿＿＿＿＝

1 2 点 A(-3)，B(5) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

(1) 3：2 に内分する点　　(2) 中点

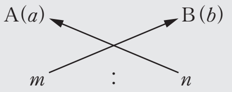
(3) 7：3 に外分する点　　(4) 1：4 に外分する点

Point Pickup

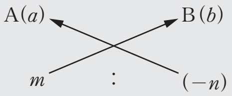
数直線上の内分点・外分点の座標

数直線上の点 A(a)，B(b) に対して

線分 AB を $m：n$ に内分する点の座標は $\dfrac{na+mb}{m+n}$



線分 AB を $m：n$ に外分する点の座標は $\dfrac{-na+mb}{m-n}=\dfrac{na-mb}{-m+n}$



外分点の座標の式は，内分点の座標の式の n を $-n$ に(または m を $-m$ に)おき換えたものである。

第 5 講　PART1 確認問題

2 点 A(-2)，B(6) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

1　3：1 に内分する点

[ア]

2　中点

[イ]

3　2：1 に外分する点

[ウエ]

4　1：3 に外分する点

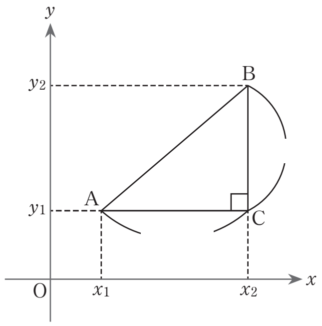
[オカ]

PART2 座標平面上の点

要点 ① 座標平面上の 2 点間の距離

座標平面上の 2 点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 間の距離 AB を求める。

直線 AB が座標軸に平行でないとき，右図のような直角三角形 ABC において



$AC=\qquad$，$BC=\qquad$

三平方の定理により $AB^2=AC^2+BC^2$ であるから

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$$
$$=\sqrt{\qquad^2+\qquad^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

この式は，直線 AB が座標軸のいずれかに平行な場合も成り立つ。

よって，次のことが成り立つ。

座標平面上の 2 点間の距離

2 点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 間の距離は

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

とくに，原点 O と $A(x_1, y_1)$ の距離は　$OA=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}$

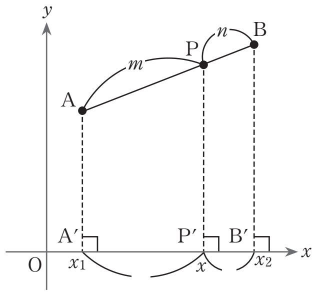
例　2 点 $A(3, 2)$，$B(1, -1)$ について

$$AB=\sqrt{(\qquad)^2+(\qquad)^2}=\sqrt{\quad^2+\quad^2}=\sqrt{13}$$
$$OB=\sqrt{\quad^2+(\quad)^2}=\sqrt{\quad^2+\quad^2}=\sqrt{2}$$

要点 ② 座標平面上の内分点・外分点

座標平面上の 2 点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を $P(x, y)$ とする。

直線 AB が x 軸に垂直でないとき，点 A，B，P から x 軸にそれぞれ垂線 AA′，BB′，PP′ を下ろすと



$$A'P':P'B'=AP:PB=m:n$$

である。よって，数直線上の内分点の公式から

$$x=\frac{\qquad+\qquad}{\qquad+\qquad}$$

である。このことは，直線 AB が x 軸に垂直であるときも成り立つ。

同様に，$y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$ が成り立つ。

また，外分点についても，同様に考えることができる。

以上より，次のことが成り立つ。

座標平面上の内分点・外分点の座標

2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ に対して

線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

とくに，線分 AB の中点の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

例　点 $A(3,\ 2)$，$B(1,\ -1)$ に対して

線分 AB を $1:2$ に内分する点 P の座標は，$P(x,\ y)$ とすると

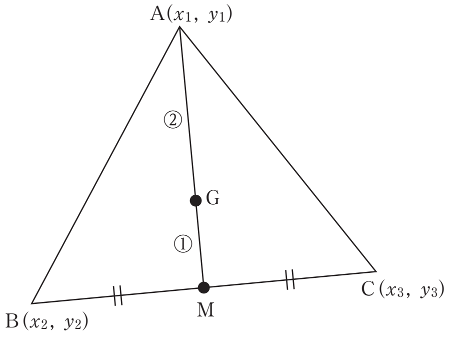
$$x=\underline{\qquad\qquad}=\frac{7}{3},\quad y=\underline{\qquad\qquad\qquad}=\frac{3}{3}=1 \quad より \quad P\left(\frac{7}{3},\ 1\right)$$

線分 AB を $2:5$ に外分する点 Q の座標は，$Q(x,\ y)$ とすると

$$x=\underline{\qquad\qquad\qquad}=\frac{13}{3},\quad y=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}=\frac{12}{3}=4 \quad より \quad Q\left(\frac{13}{3},\ 4\right)$$

3点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心 G の座標を求める。

辺 BC の中点 M の座標は $\left(\qquad\quad,\qquad\quad\right)$



重心 G は，中線 AM を $2:1$ に内分する点であるから，

その x 座標は $\underline{\qquad\qquad\qquad}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$

同様に，y 座標は

よって，重心 G の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

2　3 点 A(2, −2), B(5, 4), C(−1, 3) について，次のものを求めよ。

(1)　線分 AB の長さ　　(2)　線分 AB を 2：1 に内分する点の座標

(3)　線分 AB を 1：3 に外分する点の座標　　(4)　△ABC の重心の座標

Point Pickup

座標平面上の 2 点間の距離

2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離は　$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

座標平面上の内分点・外分点の座標

2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ に対して

線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

三角形の重心の座標

3 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を頂点とする △ABC の重心 G の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

第 5 講　PART2 確認問題

3 点 A(0, 5)，B(6, 3)，C(3, 7) について，次のものを求めよ。

1 線分 AB の長さ　$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イウ}}$

2 線分 AB を 1：2 に内分する点の座標

$$\left(\boxed{エ},\ \frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}\right)$$

3 線分 AB を 3：1 に外分する点の座標

$$\left(\boxed{ク},\ \boxed{ケ}\right)$$

4 △ABC の重心の座標

$$\left(\boxed{コ},\ \boxed{サ}\right)$$

PART3　直線の方程式

要点 ①　1 次方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形

x, y の方程式を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からできる図形を「方程式の表す図形」といい，その方程式を「図形の方程式」という。

x, y の 1 次方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形を考える。

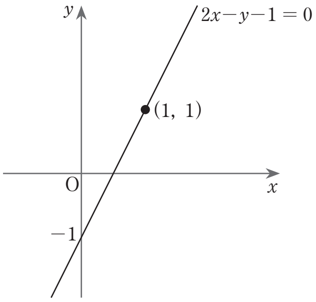
例　方程式 $2x-y-1=0$ の表す図形について

この方程式を y について解くと

$y=2x-1$

よって，方程式 $2x-y-1=0$ の表す図形は，

が 2,　　　が -1 の　　　である。

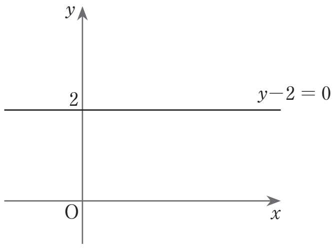


方程式 $y-2=0$ の表す図形について

この方程式を y について解くと　$y=2$

よって，方程式 $y-2=0$ の表す図形は，

点 $(0,\ 2)$ を通り，　　　　　　　　である。

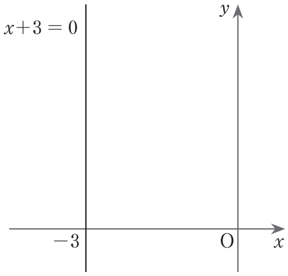


方程式 $x+3=0$ の表す図形について

この方程式を x について解くと $x=-3$

よって，方程式 $x+3=0$ の表す図形は，

点 $(-3,\ 0)$ を通り，　　　　　　　　である。



一般に，x, y の 1 次方程式 $ax+by+c=0$(a, b, c は定数，$a\neq 0$ または $b\neq 0$)の表す図形を，「直線 $ax+by+c=0$」といい，この方程式 $ax+by+c=0$ を，「直線の方程式」という。

逆に，座標平面上のすべての直線は，x, y の 1 次方程式 $ax+by+c=0$(a, b, c は定数，$a\neq 0$ または $b\neq 0$)で表される。

要点② 直線の方程式のいろいろな形

点 (1, 2) を通り，傾きが 3 の直線の方程式を求める。

傾きが 3 の直線の方程式は　　　　　　…… ①　と表される。

①が点 (1, 2) を通るので　　　　　　…… ②

より

よって，$y=3(x-1)+2$　より　$y=3x-1$

一般に，次のことが成り立つ。

直線の方程式①

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m である直線の方程式は

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

例　点 (2, −3) を通り，傾きが −4 の直線の方程式は

$y\quad=\quad(x\quad)$　よって　$y=-4x+5$

2 点 (2, 1) , (5, 3) を通る直線の方程式を求める。

この直線の傾きは ―― ＝　であることから，求める直線の方程式は

$y\quad=\quad(x\quad)$　よって　$y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}$

一般に，次のことが成り立つ。

直線の方程式②

異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1\neq x_2$ のとき　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$x_1=x_2$ のとき　$x=x_1$

例　2 点 (−1, 4)，(2, −2) を通る直線の方程式は

$y\quad=$ ―――― $\{x\quad\}$

$y-4=-2(x+1)$　よって　$y=-2x+2$

3 次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2,\ 1)$ を通り，傾きが 3

(2) 点 $(4,\ 1)$ を通り，x 軸に平行

(3) 2 点 $(-1,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を通る

(4) 2 点 $(-3,\ 0)$，$(-3,\ 5)$ を通る

Point Pickup

直線の方程式

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m である直線の方程式は

$$y-y_1=m(x-x_1) \iff y=m(x-x_1)+y_1$$

異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \Leftrightarrow y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$

$x_1=x_2$ のとき　$x=x_1$

第 5 講　PART3 確認問題

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

1　点 (1, 3) を通り，傾きが 2

$y=$ ア $x+$ イ

2　点 (2, 5) を通り，x 軸に平行

ウ

①　$x=2$　　②　$y=5$　　③　$y=\frac{5}{2}x$　　④　$y=\frac{5}{2}$

3　2 点 (1, 2), (3, −4) を通る

$y=-$ エ $x+$ オ

4　2 点 (3, 1), (3, 7) を通る

カ

①　$y=7x$　　②　$y=\frac{7}{3}x$　　③　$x=3$　　④　$y=6$

PART4 2直線の関係

要点① 2直線の関係

2直線が平行ならば，その傾きは等しく，逆に傾きが等しければ2直線は平行である。ここでは，2直線が垂直になるときを考える。

2直線の方程式を $l_1 : y=m_1x+n_1$，$l_2 : y=m_2x+n_2$ とする。l_1 と l_2 が垂直となるのは，それぞれの直線に平行で原点Oを通る2直線 $y=m_1x$，$y=m_2x$ が垂直になるときである。

2直線 $y=m_1x$ と $y=m_2x$ 上にそれぞれ点 P(1,　　), Q(1,　　) をとる。三平方の定理により

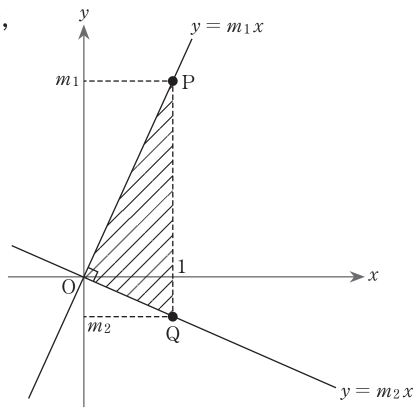
$$PQ^2=OP^2+OQ^2$$

$$(\qquad)^2=(\qquad)+(\qquad)$$

$$m_1{}^2-2m_1m_2+m_2{}^2=1+m_1{}^2+1+m_2{}^2$$

よって

したがって，2直線 l_1，l_2 が垂直ならば，$m_1m_2=-1$ が成り立つ。



逆に，$m_1m_2=-1$ ならば，2直線 l_1，l_2 は垂直である。

一般に，次のことが成り立つ。

2直線の平行と垂直

2直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ について

2直線が平行 $\iff$ $m_1=m_2$

2直線が垂直 $\iff$ $m_1m_2=-1$

例 点(1, 3)を通り，直線 $y=2x-4$ に平行な直線 l_1，垂直な直線 l_2 の方程式をそれぞれ求める。

直線 l_1 の傾きは　である。よって，直線 l_1 の方程式は

$$y-3=2(x-1) \qquad y=2(x-1)+3 \quad より \quad y=2x+1$$

直線 l_2 の傾きを m とすると　　　　　より $m=-\frac{1}{2}$

よって，直線 l_2 の方程式は

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad y=-\frac{1}{2}(x-1)+3 \ より\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

【MEMO】

4　点 $(5,\ 2)$ を通り，直線 $x+3y+1=0$ に平行な直線 l_1，垂直な直線 l_2 の方程式をそれぞれ求めよ。

Point Pickup

2 直線の平行と垂直

2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ について

2 直線が平行 $\iff$ $m_1=m_2$ （傾きが等しい）

2 直線が垂直 $\iff$ $m_1m_2=-1$ （傾きの積が -1）

第 5 講　PART4 確認問題

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。答えは①～④のうちから選べ。

1　点 $(2,\ 3)$ を通り，直線 $2x+y-1=0$ に平行な直線 l

ア

①　$y=2x-1$　　②　$y=-2x+7$

③　$y=\dfrac{1}{2}x+2$　　④　$y=-\dfrac{1}{2}x+4$

2　点 $(2,\ 3)$ を通り，直線 $2x+y-1=0$ に垂直な直線 l

イ

①　$y=2x-1$　　②　$y=-2x+7$

③　$y=\dfrac{1}{2}x+2$　　④　$y=-\dfrac{1}{2}x+4$

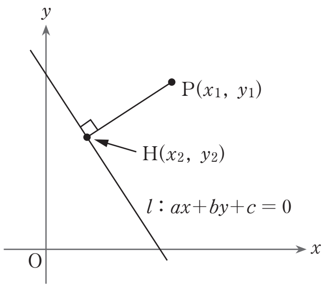
PART5 点と直線の距離

要点① 点と直線の距離

点Pから直線 l に下ろした垂線PHの長さを「　　　　　　　　」という。

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と直線 $l：ax+by+c=0$ の距離を求める。

$\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$ とすると $\mathrm{PH}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ …… ①



$a\neq0$ かつ $b\neq0$ のとき，直線 l の傾きは　　，直線PHの

傾きは　　　　である。直線 l と直線PHは垂直であるから

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\qquad \text{すなわち}\quad \frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}$$

この式の値を k とすると $\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}=k$ より $x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk$ …… ②

②を①に代入すると $\mathrm{PH}^2=(ak)^2+(bk)^2=(a^2+b^2)k^2$ …… ③

また，$\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$ は直線 l 上の点であるから $ax_2+by_2+c=0$

この式に，② ⇔ $x_2=x_1+ak,\ y_2=y_1+bk$ を代入して

$$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0 \qquad \text{よって}\quad k=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}\ \cdots\cdots\ ④$$

④を③に代入すると $\mathrm{PH}^2=(a^2+b^2)\cdot\dfrac{(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}=\dfrac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}$

$\mathrm{PH}\geqq0$ より $\mathrm{PH}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

これは，a，b のうちいずれか一方が0のときも成り立つ。

以上より，次のことが成り立つ。

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

例　点 $(2,\ 1)$ と直線 $3x-4y+2=0$ の距離 d は $d=\dfrac{|\qquad\qquad|}{\sqrt{\qquad\qquad}}=\dfrac{|4|}{\sqrt{25}}=\dfrac{4}{5}$

[MEMO]

5　次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　原点と直線 $3x+4y+5=0$

(2)　点 $(1,\ -3)$ と直線 $x-2y-13=0$

Point Pickup

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

・直線の式を，$ax+by+c=0$（一般形）の形にする。

・分母は，直線の x，y の係数の 2 乗の和の $\sqrt{}$（正の平方根）

　分子は，直線の式の左辺の x，y にそれぞれ点の x 座標，y 座標を代入したものの絶対値

第 5 講　PART5 確認問題

次の点と直線の距離を求めよ。

1　原点と直線 $4x+3y-10=0$

　ア

2　点 $(3,\ 1)$ と直線 $x+2y+5=0$

　イ $\sqrt{\text{ウ}}$

第 6 講　円

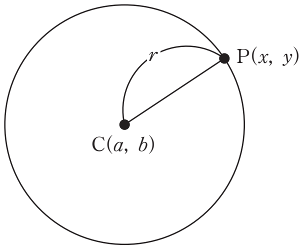
PART1　円の方程式

要点 ①　円の方程式

円は，定点からの距離が一定である点全体の集合である。

円の方程式を求める。

中心が C$(a,\ b)$，半径が r の円上の点を P$(x,\ y)$ とすると



より　　　　　　　　$=r$

したがって　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

円の方程式

点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は　$x^2+y^2=r^2$

例　中心が点 (1, 2)，半径が 3 の円の方程式は

　　　　　　$+$　　　　$=$　　　すなわち　$(x-1)^2+(y-2)^2=9$

方程式 $(x+3)^2+(y-2)^2=5$ は，$\{x-(-3)\}^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$ と変形できることから，

中心　　　　　，半径　　　の円を表す。

要点 ②　$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を変形すると

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

となる。

一般的に，円の方程式は

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \ (l,\ m,\ n \text{ は定数})$$

の形で表される。

$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の形の方程式は，$(x-a)^2+(y-b)^2=k$ の形に変形することができる。

例　方程式 $x^2+y^2-6x+10y+30=0$ の表す図形

$$x^2-6x+y^2+10y+30=0$$

$$(x\quad)^2\quad+(y\quad)^2\qquad+30=0$$

$$(x-3)^2+(y+5)^2=4$$

よって，この方程式は点　　　　　を中心とする半径　の　を表す。

方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ は

$k>0$ ならば　中心 $(a,\ b)$，半径 $\sqrt{k}$ の円

$k=0$ ならば　点 $(a,\ b)$

を表し，$k<0$ ならば，この方程式が表す図形はない。

1 (1) 次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i) 中心が点 $(1,\ -1)$ で，半径が 2

(ii) 中心が原点で，点 $(3,\ -4)$ を通る

(iii) 3 点 $(0,\ 2)$，$(6,\ 0)$，$(7,\ 3)$ を通る

(2) 方程式 $x^2+y^2+4x-8y+17=0$ はどのような図形を表すか。

Point Pickup

円の方程式の決定

点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (標準形)

とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は　$x^2+y^2=r^2$

中心の座標や半径の情報がない場合は $x^2+y^2+lx+my+n=0$ (一般形) を用いる。

方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

x，y それぞれについて平方完成し，$(x-a)^2+(y-b)^2=k$ の形に変形する。

$k>0$ ならば　中心 $(a,\ b)$，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

第 6 講　PART1 確認問題

1　中心が点 $(2,\ 4)$ で，半径が 3 の円の方程式は，

$$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{イ}}\right)^2=\boxed{\text{ウ}}$$

である。

2　中心が原点で，点 $(3,\ -1)$ を通る円の方程式は，

$$x^2+y^2=\boxed{\text{エオ}}$$

である。

3　3 点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 4)$，$(3,\ 0)$ を通る円の方程式は，

$$x^2+y^2-\boxed{\text{カ}}x-\boxed{\text{キ}}y+\boxed{\text{ク}}=0$$

である。

4　方程式 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ の表す図形は，

点 $\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ を中心とする半径 $\boxed{\text{サ}}$ の円

である。

PART2 円と直線の共有点の座標と個数

要点 ① 円と直線の共有点の座標

円と直線の共有点の座標は，円の方程式と直線の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

例 円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=x+1$ の共有点の座標を求める。

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 & \cdots\cdots① \\ y=x+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②を①に代入して

$x^2+(x+1)^2=25$

$x^2+x-12=0$　　$(x-3)(x+4)=0$

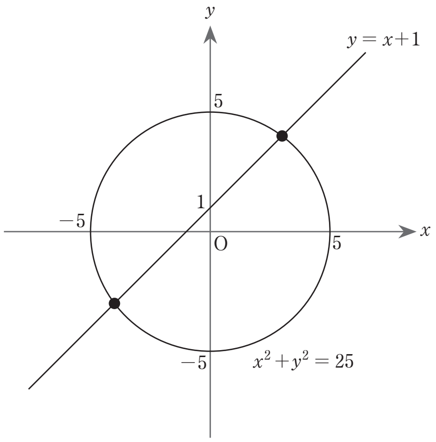
$x=3,\ -4$

これを　に代入して

$x=3$ のとき　$y=4$

$x=-4$ のとき $y=-3$

よって，共有点の座標は　$(3,\ 4)$，$(-4,\ -3)$



要点 ② 円と直線の共有点の個数

円の方程式と直線の方程式を連立させ，1 つの文字，例えば y を消去して得られる x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数と，円と直線の共有点の個数は一致する。この 2 次方程式の判別式を D とすると，共有点の個数は D の符号によって次のようになる。

円と直線の共有点の個数

円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とすると

$D>0$　$\Longleftrightarrow$　円と直線の共有点は 2 個

$D=0$　$\Longleftrightarrow$　円と直線の共有点は 1 個

$D<0$　$\Longleftrightarrow$　円と直線の共有点は 0 個

例　円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=3x-1$ の共有点の個数を求める。

$x^2+y^2=4$ に $y=3x-1$ を代入して整理すると　$10x^2-6x-3=0$

この方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-10\cdot(-3)=39$

よって，求める共有点の個数は　個

2 次の円と直線の共有点の個数を求めよ。また，共有点がある場合はその座標を求めよ。

(1) $x^2+y^2=5$，$y=2x-5$

(2) $x^2+y^2=2$，$y=-2x+1$

(3) $x^2+y^2=8$，$y=x+6$

Point Pickup

円と直線の共有点

円の方程式と直線の方程式を連立させ，y を消去して得られる x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ …… ①　において

- ①の実数解が，円と直線の共有点の x 座標。共有点の y 座標は，この実数解を直線の式の x に代入して求める。
- ①の判別式を D とすると

$D>0 \iff$ 円と直線の共有点は 2 個

$D=0 \iff$ 円と直線の共有点は 1 個

$D<0 \iff$ 円と直線の共有点は 0 個

第 6 講　PART2 確認問題

次の円と直線の共有点の個数を求め，共有点がある場合はその座標を求めよ。答えは①～⑤のうちから選べ。

1　$x^2+y^2=10$，$y=x-2$

ア

① 共有点の個数は 2 個　その座標は　$(-1,\ -3)$，$(3,\ 1)$

② 共有点の個数は 2 個　その座標は　$(-3,\ -1)$，$(1,\ 3)$

③ 共有点の個数は 1 個　その座標は　$(3,\ 1)$

④ 共有点の個数は 1 個　その座標は　$(-1,\ -3)$

⑤ 共有点の個数は 0 個

2　$x^2+y^2=20$，$y=-2x+10$

イ

① 共有点の個数は 2 個　その座標は　$(-2,\ 14)$，$(2,\ 6)$

② 共有点の個数は 2 個　その座標は　$(-4,\ 18)$，$(4,\ 2)$

③ 共有点の個数は 1 個　その座標は　$(2,\ 6)$

④ 共有点の個数は 1 個　その座標は　$(4,\ 2)$

⑤ 共有点の個数は 0 個

3 $x^2+y^2=4$，$y=-x+3$

ウ

① 共有点の個数は 2 個　その座標は　$(-2,\ 5)$，$(2,\ 1)$

② 共有点の個数は 2 個　その座標は　$(-3,\ 6)$，$(3,\ 0)$

③ 共有点の個数は 1 個　その座標は　$(2,\ 1)$

④ 共有点の個数は 1 個　その座標は　$(3,\ 0)$

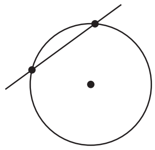
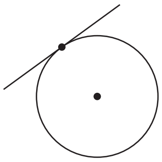
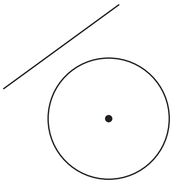
⑤ 共有点の個数は 0 個

[MEMO]

PART3 円と直線の位置関係

要点 ① 円と直線の位置関係（２次方程式の判別式の利用）

円と直線の共有点の個数は，円の方程式と直線の方程式から，１つの文字を消去して得られる２次方程式の判別式 D の符号によって求めることができる。よって，円と直線の位置関係は次のように分類できる。

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
円と直線の位置関係	異なる２点で交わる 	接する 	共有点をもたない 

例 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ が異なる２点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求める。

連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots① \\ y=x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$ において，②を①に代入すると

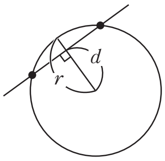
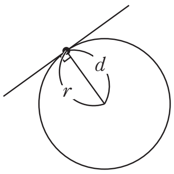
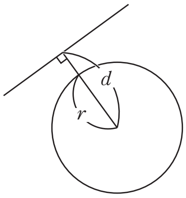
$x^2+(x+k)^2=1$　　すなわち　　$2x^2+2kx+k^2-1=0$

この方程式の判別式を D とすると，円と直線が異なる２点で交わるのは，D　　のときであるから

$\dfrac{D}{4}=k^2-2\cdot(k^2-1)>0$　　　$k^2-2<0$　　　よって　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

要点 ② 円と直線の位置関係（点と直線の距離の利用）

円と直線の位置関係について，円の中心と直線との距離を d，円の半径を r とすると，d と r の大小により以下のように分類できる。

d と r の大小			
円と直線の位置関係	異なる２点で交わる 	接する 	共有点をもたない 

例 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=3x-1$ の位置関係を求める。

円 $x^2+y^2=4$ の中心は原点 　　　，半径は $r=$

点 $(0,\ 0)$ と直線 　　　　　　　　　の距離 d は

$$d=\frac{|\qquad\qquad|}{\sqrt{\quad+\quad}}=\frac{|-1|}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\frac{1}{\sqrt{10}}$ 　2 より，$d<r$ 　よって円と直線は

例 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=-x+k$ が異なる 2 点で交わるとき, 定数 k の値の範囲を求める。

円 $x^2+y^2=1$ の中心は原点 　　　，半径は $r=$

点 $(0,\ 0)$ と直線 　　　　　　　　　の距離 d は

$$d=\frac{|\qquad\qquad|}{\sqrt{\quad+\quad}}=\frac{|-k|}{\sqrt{2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

円と直線が異なる 2 点で交わるのは, 　　　　のときであるから

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<1$ 　　　$|k|<\sqrt{2}$ 　　　よって　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

3 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=3x+k$ について，次の問いに答えよ。

(1) 円と直線が接するとき，定数 k の値を求めよ。

(2) 円と直線が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

円と直線の位置関係

円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とすると

① $D>0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる

② $D=0$ $\Longleftrightarrow$ 接する

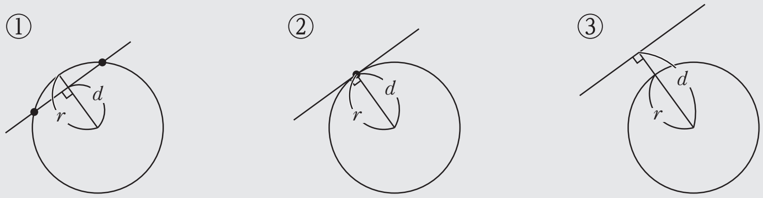
③ $D<0$ $\Longleftrightarrow$ 共有点をもたない

円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とすると

① $d<r$ $\Longleftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる

② $d=r$ $\Longleftrightarrow$ 接する

③ $d>r$ $\Longleftrightarrow$ 共有点をもたない



第 6 講　PART3 確認問題

1　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=-2x+k$ が接するとき，定数 k の値は

$$k=\boxed{ア},\ \boxed{イウ}$$

である。

2　円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=x+k$ が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲は

$$k<\boxed{エオ},\ \boxed{カ}<k$$

である。

PART4 円の接線

要点 ① 円の接線の方程式

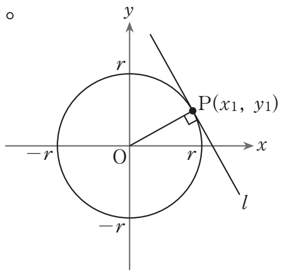
円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線 l の方程式を求める。

点 P が座標軸上にないとき，すなわち $x_1 \neq 0$，$y_1 \neq 0$ のとき，

直線 OP の傾きは ── である。l 　OP であるから，l の傾きは

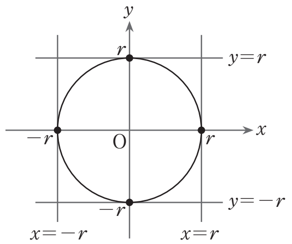
　　である。よって，接線 l の方程式は

$$y=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1 \qquad \text{すなわち} \quad x_1x+y_1y=x_1{}^2+y_1{}^2$$



また，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は円上の点であることから $x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$

よって，接線 l の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$ である。



この式は，点 P が座標軸上にある場合も成り立つ。

円上の点における接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

例 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ -4)$ における接線の方程式は

$$\quad x+\quad y=25$$

すなわち　$3x-4y=25$

要点 ② 円の外部の点から円に引いた接線の方程式

ここでは，円の外部の点から円に引いた接線の方程式を求める。

例 点 $\mathrm{A}(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式を求める。

接点を P 　　　　とすると，点 P における接線の方程式は

$$\quad x+\quad y=5 \ \cdots\cdots ①$$

この直線が点 $\mathrm{A}(3,\ 1)$ を通るので $3x_1+y_1=5$ …… ②

また，点 P は円上の点であるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=5$ …… ③

②より　$y_1=-3x_1+5$ …… ④

これを③に代入して整理すると　$x_1{}^2-3x_1+2=0$

これを解いて $x_1=1$，2

④より　$x_1=1$ のとき　$y_1=2$　　　　$x_1=2$ のとき $y_1=-1$

したがって①から，求める接線の方程式は

$x+2y=5$，$2x-y=5$

4　(1)　円 $x^2+y^2=5$ 上の点 P(2，1) における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 A(4，-2) から円 $x^2+y^2=10$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

Point Pickup

円上の点における接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

円外の点から引いた接線の方程式

① 接点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおき，点 P における接線の方程式を求める。

② ①の方程式に，通る円外の点の座標を代入する。

③ 点 P は円上の点であることから，点 P の座標を円の方程式に代入する。

④ ②と③を連立方程式として解き，x_1，y_1 を求め，①に代入して接線の方程式を求める。

第 6 講　PART4 確認問題

1　円 $x^2+y^2=10$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式は

$x+$ ア $y=$ イウ

である。

2　点 A$(3,\ -1)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式は

$x-$ エ $y=$ オ ,

カ $x+y=$ キ

であり，接点の座標は

(ク , ケコ), (サ , シ)

である。

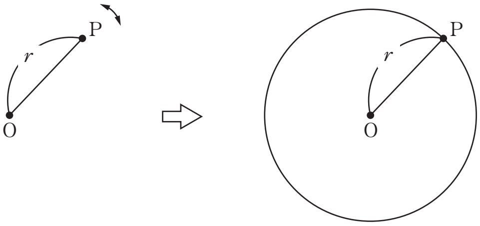
第 7 講　軌跡と領域

PART1　軌跡の方程式

要点 ①　軌跡の方程式

与えられた条件を満たす点全体の集合(図形)を，その条件を満たす点の「　　　」という。

例　平面上で，定点 O から一定の距離 r にある点 P の軌跡は，点 O を中心とする半径 r の円である。



与えられた条件を満たす点の軌跡を，座標を用いて求める。

例　2 点 A(0, 3)，B(3, 0) に対して，条件 AP＝BP を満たす点 P の軌跡を求める。

点 P の座標を　　　　とする。

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\qquad\qquad\qquad}=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$\mathrm{BP}=\sqrt{\qquad\qquad\qquad}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

AP＝BP より AP $\;$＝BP

よって　$x^2+(y-3)^2=(x-3)^2+y^2$

整理すると $x-y=0$

したがって，点 P は直線 $x-y=0$ 上にある。

逆に，直線 $x-y=0$ 上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，ここまでのプロセスを逆にたどることにより，AP＝BP を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は

座標を用いて軌跡を求める手順は以下。

軌跡を求める手順

① 条件を満たす点 P の座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を x，y の方程式で表す。

② ①で表した方程式から，その方程式が表す図形を求める。

③ ②の図形上のすべての点 P が，与えられた条件を満たすことを確認する。

※③が明らかな場合は，その確認を省略することが多い。

[MEMO]

1　次の条件を満たす点Ｐの軌跡を求めよ。

⑴　２点 A(2, 5)，B(6, 3) から等距離にある点Ｐ

⑵　２点 A(1, 1)，B(4, 7) からの距離の比が１：２である点Ｐ

Point Pickup

点Ｐの軌跡を求める手順

①　点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を x，y の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。

②　①の図形上のすべての点Ｐが，与えられた条件を満たすことを確認する。

※②について，①を逆にたどることにより条件を満たすことが明らかな場合は，②の記述を省略することが多い。

第 7 講　PART1 確認問題

1　2 点 A(1, 3), B(4, 1) から等距離にある点 P の軌跡は

直線 [ア]$x-$[イ]$y-$[ウ]$=0$

である。

2　2 点 A(1, −3), B(−7, 5) からの距離の比が 1 : 3 である点 P の軌跡は

中心 ([エ], [オカ]), 半径 [キ]$\sqrt{\text{[ク]}}$ の円

である。

PART2 不等式の表す領域

要点① 直線を境界とする領域

x，y に関する不等式を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，その不等式の表す「　　」という。

不等式 $y > x-1$ の表す領域について考える。

点 $P(x_1,\ y_1)$ が $y > x-1$ を満たす領域にあるとき

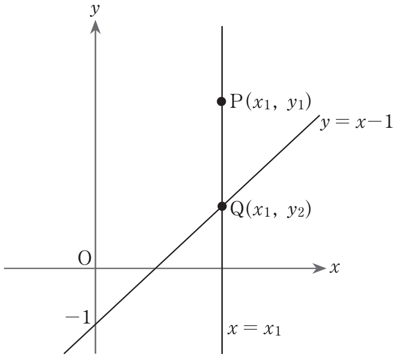
$$y_1 > x_1-1 \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

また，点 P を通り x 軸に垂直な直線 $x=x_1$ と 直線 $y=x-1$ の交点を $Q(x_1,\ y_2)$ とすると

$$y_2 = x_1-1 \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。



①，②より　　　　である。

よって，点 P は点 Q より　　にあり，

すべての x_1 に関してこれは成立する。

したがって，点 P は直線 $y=x-1$ より　　にある。

逆に，点 $P(x_1,\ y_1)$ が直線 $y=x-1$ より上側にあるとき，$(x_1,\ y_1)$ は不等式 $y > x-1$ を満たす。

ゆえに，不等式 $y > x-1$ の表す領域は，直線 $y=x-1$ の　　である。

同様に，$y < x-1$ の表す領域は，直線 $y=x-1$ の　　である。

一般に，直線で分けられる領域について，次のことが成り立つ。

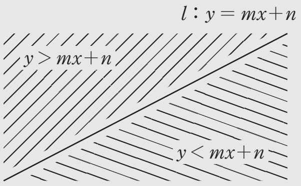
直線を境界とする領域

直線 $y=mx+n$ を l とすると

不等式 $y > mx+n$ の表す領域は 直線 l の上側

不等式 $y < mx+n$ の表す領域は 直線 l の下側

いずれも，境界線 $y=mx+n$ は含まない。



要点② 円を境界とする領域

不等式 $x^2+y^2<r^2$ …… ① の表す領域について考える。

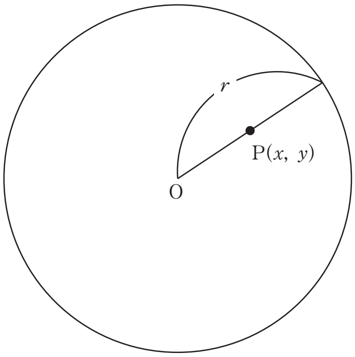
原点Oから点P$(x,\ y)$までの距離OPについて

$\mathrm{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$ より $\mathrm{OP}^2=x^2+y^2$

であるから，①は

$\mathrm{OP}^2<r^2$ すなわち $\mathrm{OP}<r$

である。これは，①を満たす点Pが，原点中心，半径 r の円の　　にあることを表している。



よって，不等式①の表す領域は，円 $x^2+y^2=r^2$ の　　である。

同様に，$x^2+y^2>r^2$ の表す領域は，円 $x^2+y^2=r^2$ の　　である。

一般に，円で分けられる領域について，次のことが成り立つ。

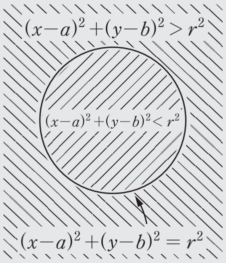
円を境界とする領域

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とすると

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は 円 C の内部

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は 円 C の外部

いずれも，境界線 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ は含まない。



2 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y > 2x+1$

(2) $x+3y \leqq 3$

(3) $x \geqq 1$

(4) $y-2 < 0$

(5) $x^2+y^2 < 9$

(6) $(x-1)^2+(y-2)^2 \geqq 2$

Point Pickup

直線を境界とする領域

不等式 $y > mx+n$ の表す領域 …… 直線 $y = mx+n$ の上側

不等式 $y < mx+n$ の表す領域 …… 直線 $y = mx+n$ の下側

いずれも境界線 $y = mx+n$ は含まない。

円を境界とする領域

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2 < r^2$ の表す領域 …… 円 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ の内部

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2 > r^2$ の表す領域 …… 円 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ の外部

いずれも境界線 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ は含まない。

不等式の表す領域を図示する手順

① 境界線を図示する。必要に応じて「切片」を記入する。

② 不等式の表す領域に斜線を入れる。

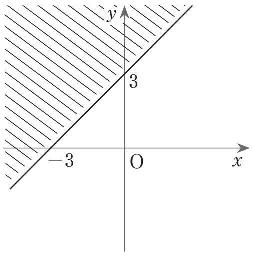
③ 領域に境界線を含むか含まないかを明記する。

第７講　PART2 確認問題

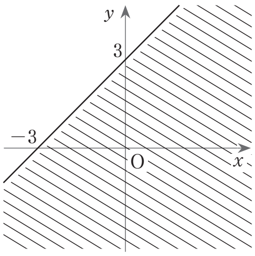
次の不等式の表す領域を，①，②のうちから選べ。

1　$y < x+3$　ア

①

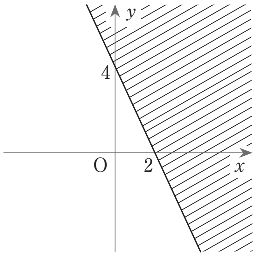


②

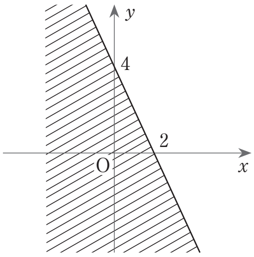


2　$2x+y \geqq 4$　イ

①

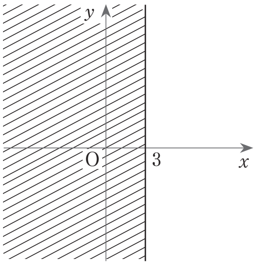


②

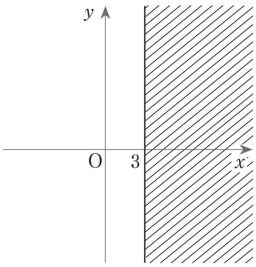


3　$x \leqq 3$　ウ

①

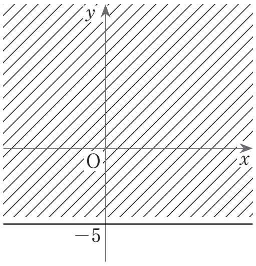


②

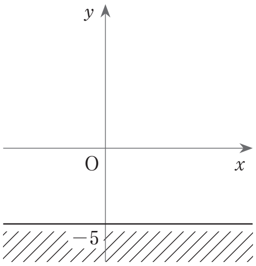


4　$y+5>0$　エ

①

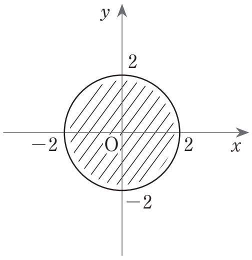


②

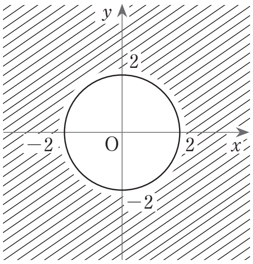


5　$x^2+y^2<4$　オ

①

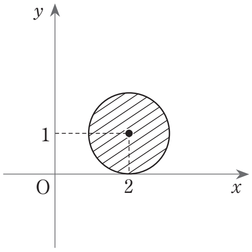


②

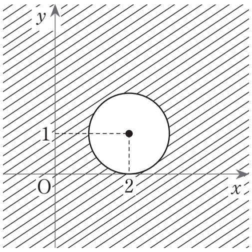


6　$(x-2)^2+(y-1)^2 \geqq 1$　カ

①



②



[MEMO]

PART3 連立不等式の表す領域

要点① 連立不等式の表す領域

x，y についての連立不等式の表す領域は，それぞれの不等式を同時に満たす点 (x, y) 全体の集合であり，それぞれの不等式が表す「　　　　　　　」である。

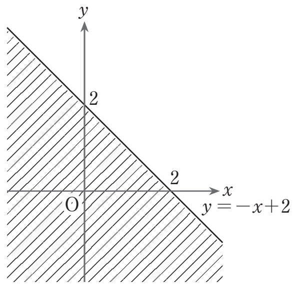
例 連立不等式 $\begin{cases} x+y<2 & \cdots\cdots① \\ 2x-y<1 & \cdots\cdots② \end{cases}$ の表す領域を図示する。

①より $y<-x+2$　よって，①の表す領域は，直線 $y=-x+2$ の「　　」である。

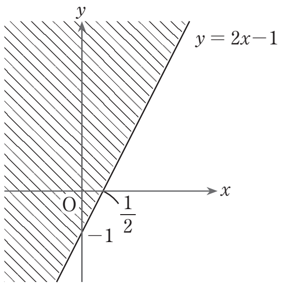
②より $y>2x-1$　よって，②の表す領域は，直線 $y=2x-1$ の「　　」である。

①の表す領域を A，②の表す領域を B とすると，求める領域は，A と B の共通部分 A　B である。

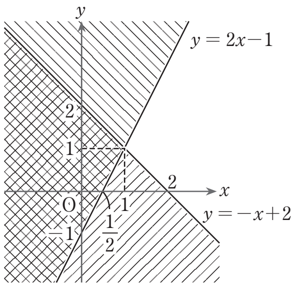
①の表す領域 A



②の表す領域 B

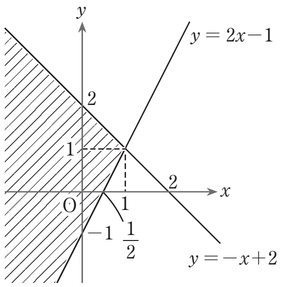


A と B の共通部分 $A\cap B$



斜線が重なっている部分

したがって，求める領域は下図斜線部分。ただし，境界線は含まない。



[MEMO]

3 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} x+y-3>0 \\ x-y-3<0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 9 \\ y \leqq x+3 \end{cases}$

Point Pickup

連立不等式の表す領域を図示する手順

それぞれの不等式が表す領域の共通部分を図示する。手順は以下。

① それぞれの不等式が表す領域の境界線を図示する。

② ①の境界線に「共有点」があれば，その座標を求め，図に書き込む。

③ それぞれの不等式が表す領域を考え，その「共通部分」に斜線を入れる。

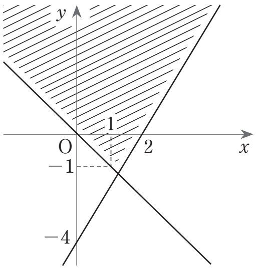
④ 領域に境界線を含むか含まないかを明記する。

第 7 講　PART3 確認問題

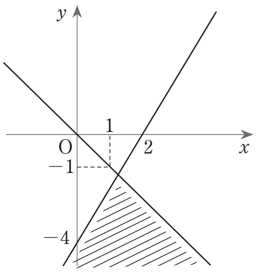
次の連立不等式の表す領域を，①～④のうちから選べ。

1　$\begin{cases} x+y>0 \\ -2x+y+4<0 \end{cases}$　ア

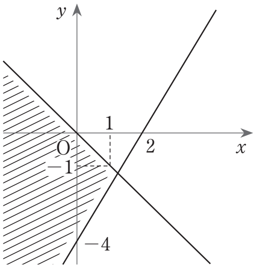
①



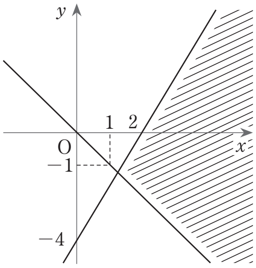
②



③

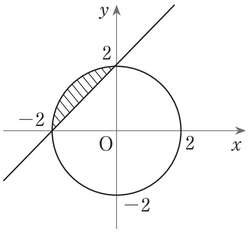


④

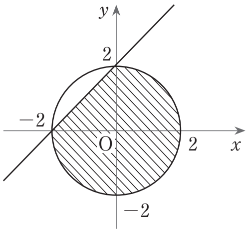


2 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4 \\ y \geqq x+2 \end{cases}$ 　イ

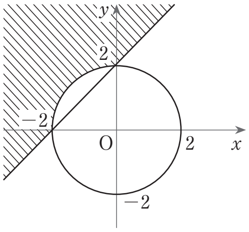
①



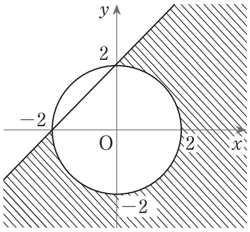
②



③



④



[MEMO]

PART4 領域と最大・最小

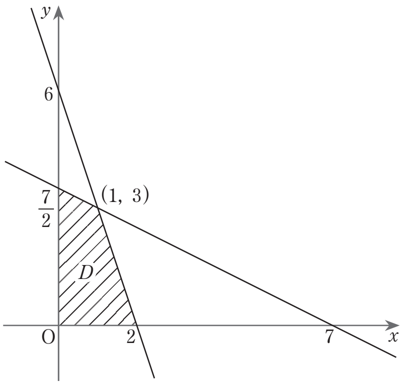
要点① 領域と最大・最小

ここでは，２つの変数 x，y によって定まる関数（２変数関数）の最大・最小を，領域を用いて求める。

例 x，y が４つの不等式

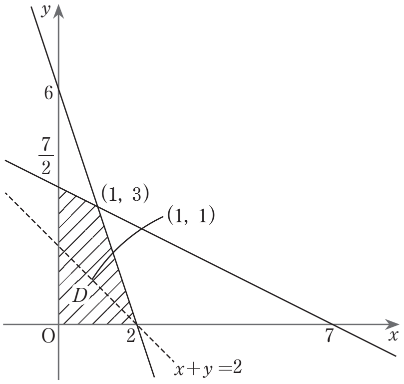
$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+2y \leqq 7$，$3x+y \leqq 6$

を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求める。



与えられた連立不等式の表す領域を D とすると，D は４点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(1,\ 3)$，$\left(0,\ \dfrac{7}{2}\right)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

この領域内に点 $(1,\ 1)$ が存在し，$x=1$，$y=1$ のとき，$x+y=1+1=2$ である。

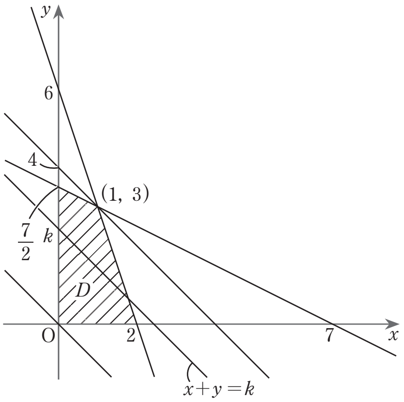


また，$x+y=2$ となる x，y の集合は，この式を満たす点の軌跡，すなわち　　$x+y=2$ であり，$(1,\ 1)$ はこの直線上かつ領域 D に属する点の１つである。

ここで

$x+y$ 　　…… ①

とおき，　①が領域 D と　　　　ような　の値の最大値と最小値を求める。



①より $y=-x+k$ であるから，①は傾きが　，y 切片が　の直線を表す。

図より，k が最大になるのは直線①が点　　を通るときで，このとき $k=1+3=4$

k が最小になるのは直線①が点　　　を通るときで，このとき $k=0+0=0$

したがって，$x+y$ は

$x=1$，$y=3$ のとき　最大値 4

$x=0$，$y=0$ のとき　最小値 0

をとる。

4　x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad x+2y \leqq 6,\quad 5x+2y \leqq 14$$

を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

Point Pickup

領域と最大・最小

①　条件として与えられた不等式(連立不等式)の表す領域を図示する。

②　最大値，最小値を求めたい式を「$=k$」とおく。

③　②の表す図形が，①の領域と共有点をもつときの k の最大値，最小値を求める。

第 7 講　PART4 確認問題

1 x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+2y \leqq 8,\ 3x+2y \leqq 12$$

を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

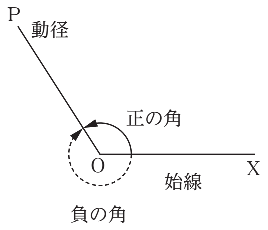
$x=$ [ア]，$y=$ [イ] のとき　最大値 [ウ]

$x=$ [エ]，$y=$ [オ] のとき　最小値 [カ]

第 8 講　三角関数とその性質

PART1 動径と一般角

要点 ① 動径と一般角



右の図のような半直線 OX，OP を考える。

半直線 OP が点 O を中心とし，OX の位置から回転したものと考えるとき，この半直線 OP を「　　」といい，動径の始めの位置を表す半直線 OX を「　　」という。

動径の回転には，2 つの向きがある。時計の針の回転と逆の向きを「　　　　」，同じ向きを「　　　　」という。

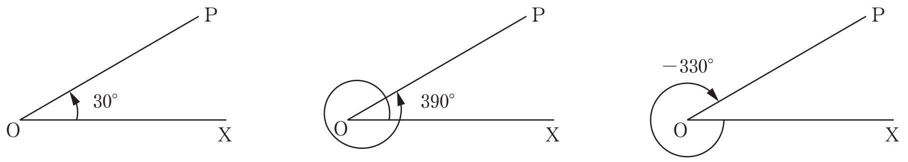
また，正の向きの回転の角を「　　　」，負の向きの回転の角を「　　　」という。正の角は正の符号を，負の角は負の符号をつけて表す。

回転の大きさについては，1 回転以上，つまり 360° 以上の場合も考える。

このように，回転の向きと大きさで表す角を「　　　」という。

θ を一般角として，始線 OX から角 θ だけ回転したときの動径 OP を「　　　　」という。

例　30° の動径，390° の動径，-330° の動径を図示する。



$390^\circ = 30^\circ$　　　，$-330^\circ = 30^\circ$　　　であるから，30° の動径と 390°，-330° の動径は一致する。一般に，動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると

$\theta = \alpha$　　　　　（n は　　）

で表される角 θ の動径は，すべて角 α の動径と一致する。この角 θ を「　　　　　　」という。始線 OX と 30° の角をなす動径 OP の表す角 θ は

$\theta = 30^\circ + 360^\circ \times n$

と表され

$n = 1$ のとき　$\theta = 30^\circ + 360^\circ \times 1 = 390^\circ$

$n = -1$ のとき　$\theta = 30^\circ + 360^\circ \times (-1) = -330^\circ$

である。

【MEMO】

1　次の角の動径 OP を図示せよ。また，60° の動径と同じ位置にあるものはどれか。

(1)　225°　　(2)　420°

(3)　−60°　　(4)　870°

Point Pickup

動径の図示

動径の回転の向き(正の向き，負の向き)と大きさを考えて図示する。

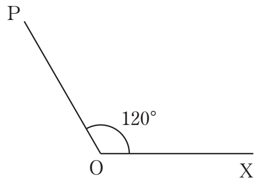
動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると

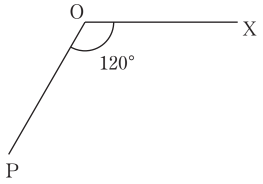
$$\theta=\alpha+360^\circ\times n \quad (n \text{ は整数})$$

で表される角 θ の動径は，角 α の動径と一致する。

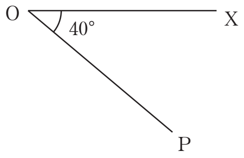
第 8 講　PART1 確認問題

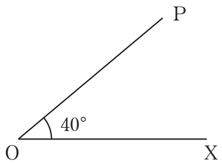
1　半直線 OX を始線として，120° の動径 OP を，次の①，②のうちから選べ。［ア］

①


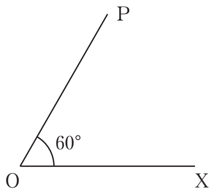
②


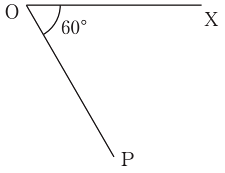
2　半直線 OX を始線として，400° の動径 OP を，次の①，②のうちから選べ。［イ］

①


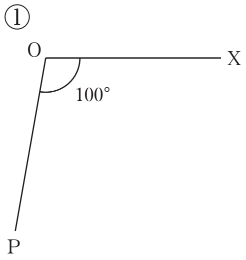
②


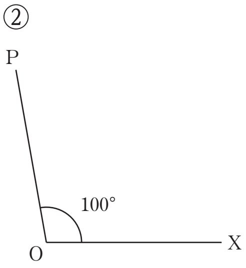
3　半直線 OX を始線として，−300° の動径 OP を，次の①，②のうちから選べ。［ウ］

①


②


4 半直線 OX を始線として，820° の動径 OP を，次の①，②のうちから選べ。 **エ**





5 次の①～④の角のうち，その動径が 150° の動径と同じ位置にあるものは **オ** である。

① 30°　　② −150°

③ −210°　　④ 450°

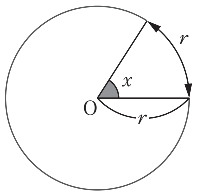
[MEMO]

PART2 弧度法

要点① 弧度法

角の大きさを表すのに，これまでは直角の $\dfrac{1}{90}$ である「1 度」(1°) を単位とする「度数法」を用いてきた。ここでは，角の大きさを表す別の方法について学んでいく。

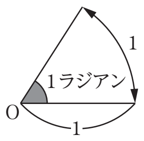
半径 r の円において，この円の「　　　　　　　　　　」に対する中心角の大きさを x とすると



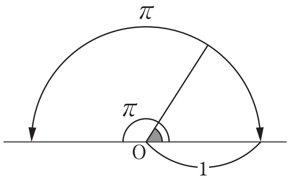
$$\text{より}\quad x^\circ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \fallingdotseq 57.3^\circ$$

であり，この結果は半径 r の大きさによらず一定である。

この x の大きさを「1　　　　　」(1 弧度) といい，これを単位とする角の大きさの表し方を「　　　」という。



半径 1 の円においては，長さ 1 の弧に対する中心角の大きさが，1 ラジアンである。この円において，半円の弧の長さは $2\pi\times1\times\dfrac{1}{2}=$　　であるから，この弧に対する中心角は π ラジアンである。よって



　　＝　　ラジアン

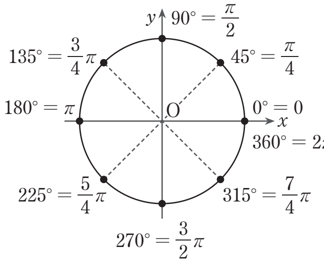
である。よって，以下の関係が成り立つ。

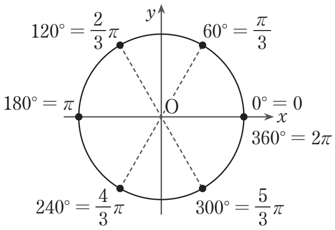
$$180^\circ=\pi\ \text{ラジアン},\quad 1^\circ=\frac{\pi}{180}\ \text{ラジアン},\quad 1\text{ラジアン}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

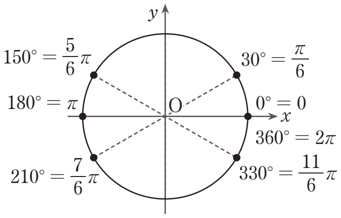
弧度法では，普通，単位のラジアンを省略する。

例　45° を弧度法で表すと　　　$45=\dfrac{1}{4}\pi=\dfrac{\pi}{4}$

　$\dfrac{5}{12}\pi$ を度数法で表すと　$\dfrac{5}{12}$　　　　$=75^\circ$







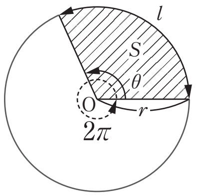
弧度法において，動径 OP と始線 OX のなす角の1つを α とすると，動径 OP の表す角は

$$\theta=\alpha \qquad\qquad =\alpha+2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

で表される。

要点② 扇形の弧の長さと面積

半径 r の円の円周の長さは $2\pi r$，面積は πr^2 である。



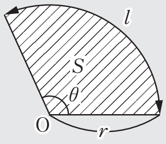
その一部である半径 r，中心角 θ の扇形について，弧の長さ l，面積 S はその中心角に比例するから

$$l=2\pi r\times\frac{\theta}{\ }=r\theta,\quad S=\pi r^2\times\frac{\theta}{\ }=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}lr$$

扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

$$l=r\theta,\qquad S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}lr$$



2 (1) 次の角を弧度法で表せ。

(i) 30° (ii) 495° (iii) $-120°$

(2) 次の角を度数法で表せ。

(i) $\frac{5}{4}\pi$ (ii) $-\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{13}{6}\pi$

(3) 半径 6，中心角 $\frac{3}{5}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

Point Pickup

弧度法と度数法

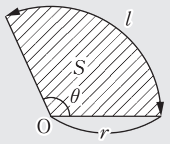
度数法 → 弧度法 $1° = \frac{\pi}{180}$， $x° = \frac{\pi}{180} \times x$

弧度法 → 度数法 $\pi = 180°$

扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

$$l = r\theta, \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$



第 8 講　PART2 確認問題

1　40° を弧度法で表すと，$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$ である。

2　375° を弧度法で表すと，$\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}\pi$ である。

3　$-140°$ を弧度法で表すと，$\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}\pi$ である。

4　$\dfrac{7}{4}\pi$ を度数法で表すと，$\boxed{コサシ}°$ である。

5　$-\dfrac{\pi}{6}$ を度数法で表すと，$\boxed{スセソ}°$ である。

6　$\dfrac{8}{3}\pi$ を度数法で表すと，$\boxed{タチツ}°$ である。

7　半径 5，中心角 $\dfrac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

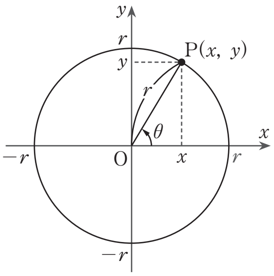
$$l=\frac{\boxed{テト}}{\boxed{ナ}}\pi$$

$$S=\frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}\pi$$

PART3 三角関数

要点 ① 三角関数

ここでは, 数学Ⅰで学んだ三角比 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ を, θ が一般角の場合において定義する。以下，角度は弧度法で表す。



右図のように，原点を中心とする半径 r の円において，x 軸の正の部分を始線とする一般角 θ の動径と，円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

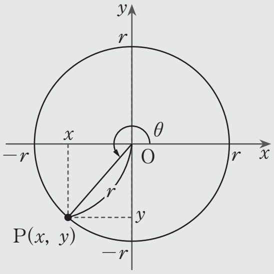
$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}$$

の各値は，円の半径 r に関係なく，角 θ だけで定まる。

よって，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を「θ の　　」として，以下のように定義する。

三角関数

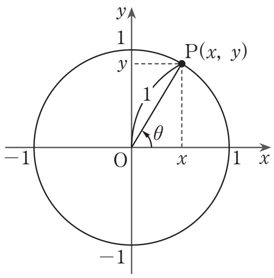
$$\sin\theta=\frac{y}{r},\qquad \cos\theta=\frac{x}{r},\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$



$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を，それぞれ一般角 θ の「　　」「　　」「　　」といい，これらをまとめて，一般角 θ の「　　　　」という。

※$\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ (n は整数) のときは，$x=0$ となるから，$\tan\theta$ は定義されない。

要点 ② 三角関数と単位円



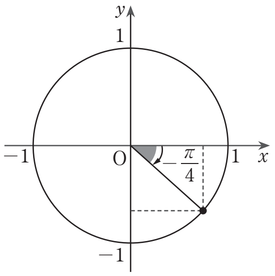
右図のように，単位円(原点を中心とする半径 1 の円)において，x 軸の正の部分を始線とする一般角 θ の動径と，円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

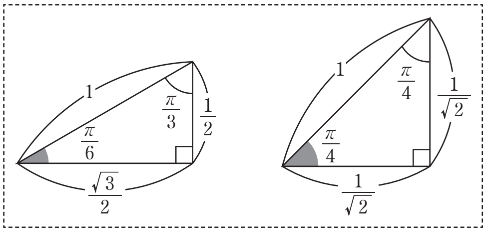
$$\sin\theta=\frac{y}{1}=y,\ \ \cos\theta=\frac{x}{1}=x$$

つまり，$\sin\theta$ の値は点Pの「　座標」，$\cos\theta$ の値は点Pの「　座標」と一致する。

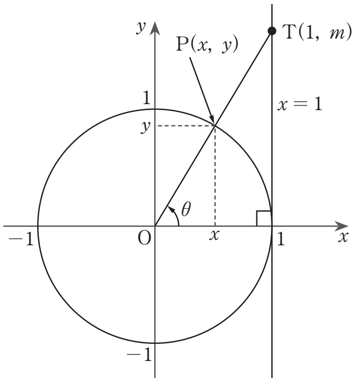
また，$-1 \leqq y \leqq 1$，$-1 \leqq x \leqq 1$ より，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ である。

例　$\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値を単位円で考える。





$\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=$　　　　，$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=$



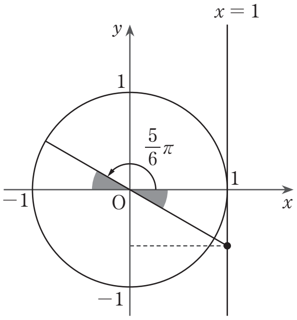
右図の単位円において，x 軸の正の部分を始線とする一般角 θ の動径と円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，直線 $x=1$ との交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{m}{1}=m$$

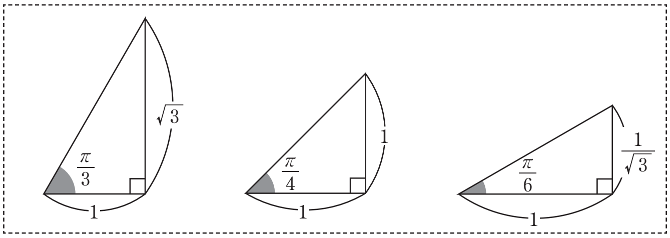
つまり，$\tan\theta$ の値は点Tの「　座標」と一致する。

点Tは直線 $x=1$ 上のすべての点を動くので，$\tan\theta$ の値の範囲は，すべての実数である。

例　$\tan\dfrac{5}{6}\pi$ の値を単位円で考える。



$\tan\dfrac{5}{6}\pi=$



3 次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1) $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$　　(2) $\theta=\dfrac{11}{6}\pi$　　(3) $\theta=-\dfrac{7}{4}\pi$　　(4) $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

Point Pickup

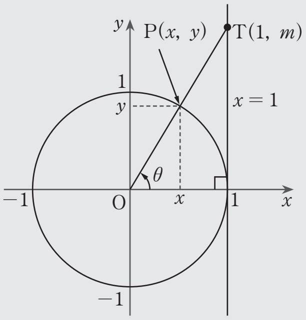
単位円を用いた三角関数の値

単位円において，x 軸の正の部分を始線とする角 θ の動径と円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，直線 $x=1$ との交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると

$$\sin\theta=y,\ \cos\theta=x,\ \tan\theta=m$$

であり，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{T}(1,\ \tan\theta)$ である。

また，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であり，$\tan\theta$ の値の範囲はすべての実数である。



第 8 講　PART3 確認問題

次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

1　$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$

$\sin\theta=$ [ア]，$\cos\theta=$ [イ]，$\tan\theta=$ [ウ]

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $-\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$

$\sin\theta=$ [エ]，$\cos\theta=$ [オ]，$\tan\theta=$ [カ]

① 1　② -1　③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

④ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $\sqrt{3}$　⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

3 $\theta = -\frac{5}{6}\pi$

$\sin\theta =$ キ , $\cos\theta =$ ク , $\tan\theta =$ ケ

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

4 $\theta = \pi$

$\sin\theta =$ コ , $\cos\theta =$ サ , $\tan\theta =$ シ

① 1　② -1　③ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

④ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ 0　⑧ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ 定義されない

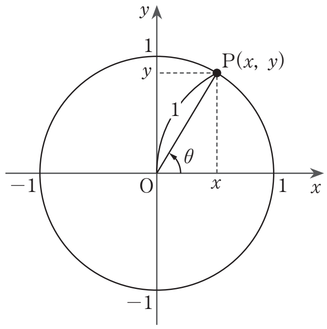
【MEMO】

PART4 三角関数の相互関係

要点① 三角関数の相互関係

単位円において，x 軸の正の部分を始線とする角 θ の動径と円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta$$



ここで，　　　　　であるから

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

また，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cdots\cdots$ ②

①，②より，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

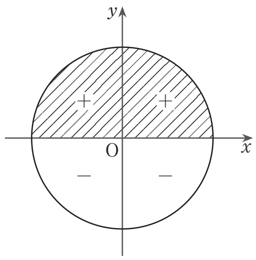
よって，三角関数においても，三角比同様，以下の相互関係が成り立つ。

三角関数の相互関係

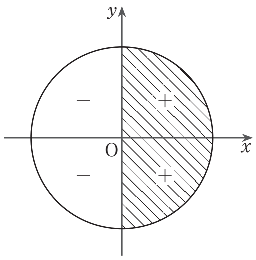
1 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　**2** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　**3** $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値の符号は，θ の動径がどの象限にあるかで決定する。

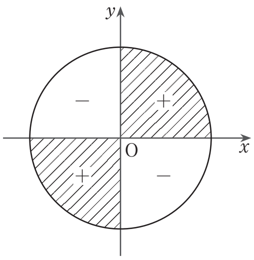
$\sin\theta$



$\cos\theta$



$\tan\theta$



[MEMO]

4　(1)　θ が第 4 象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　θ が第 3 象限の角で，$\tan\theta=3$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

Point Pickup

三角関数の相互関係

1　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　**2**　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　**3**　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

θ の動径がどの象限にあるかで，三角関数の値の符号が決定する。

第 8 講　PART4 確認問題

1　θ が第 4 象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ のとき，

$\sin\theta=$ ア ，$\tan\theta=$ イ である。

①　$\dfrac{3}{5}$　②　$\dfrac{3}{4}$　③　$\dfrac{4}{3}$　④　$\dfrac{5}{3}$

⑤　$-\dfrac{3}{5}$　⑥　$-\dfrac{3}{4}$　⑦　$-\dfrac{4}{3}$　⑧　$-\dfrac{5}{3}$

2　θ が第 3 象限の角で，$\tan\theta=2\sqrt{2}$ のとき，

$\sin\theta=$ ウ ，$\cos\theta=$ エ である。

①　3　②　$\dfrac{1}{3}$　③　$6\sqrt{2}$　④　$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

⑤　-3　⑥　$-\dfrac{1}{3}$　⑦　$-6\sqrt{2}$　⑧　$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

PART5 三角関数の性質

要点 ① $\frac{\pi}{2}-\theta$，$\pi-\theta$，$\theta+2n\pi$，$-\theta$ の三角関数

角 $\frac{\pi}{2}-\theta$，$\pi-\theta$ の動径を考えることにより，次の公式が成り立つ。

$\frac{\pi}{2}-\theta$，$\pi-\theta$ の三角関数

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$　　$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$　　$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$　　$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

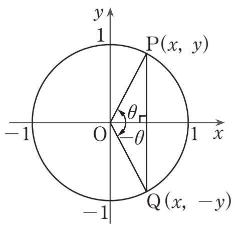
n が整数のとき，角 $\theta+2n\pi$ の動径は角 θ の動径と一致する。よって，次の公式が成り立つ。

$\theta+2n\pi$ の三角関数

$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$　$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$　$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$　(n は整数)

例　$\sin\frac{7}{3}\pi=\sin(\quad+\quad)=\qquad=$

角 θ，角 $-\theta$ の動径と単位円の交点をそれぞれ P，Q とすると，2 点 P，Q は x 軸に関して対称である。よって，P の座標を $(x,\ y)$ とすると，Q の座標は　　　　　となる。したがって，次の公式が成り立つ。



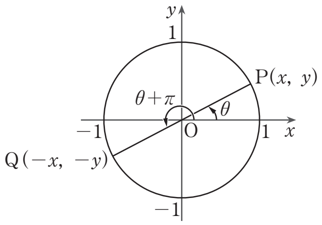
$-\theta$ の三角関数

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　$\cos(-\theta)=\cos\theta$　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

例　$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\qquad=$

要点 ② $\theta+\pi$，$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数

角 θ，角 $\theta+\pi$ の動径と単位円の交点をそれぞれ P，Q とすると，2 点 P，Q は原点に関して対称である。よって，P の座標を $(x,\ y)$ とすると，Q の座標は　　　　　　となる。
したがって，次の公式が成り立つ。

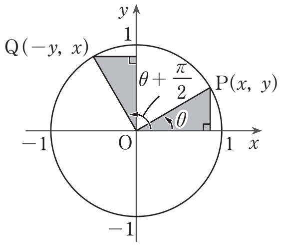


$\theta+\pi$ の三角関数

$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$　　$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$　　$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

例　$\sin\dfrac{5}{4}\pi=\sin\left(\quad+\quad\right)=\qquad=$

角 θ，角 $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の動径と単位円の交点をそれぞれ P，Q とすると，動径 OP を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したものが動径 OQ である。よって，P の座標を $(x,\ y)$ とすると，Q の座標は　　　　　　となる。したがって，次の公式が成り立つ。



$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数

$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$　　$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$　　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

角 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$\pi-\theta$，$\theta+2n\pi$，$-\theta$，$\theta+\pi$，$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の公式を用いると，すべての角に対する三角関数の値を，0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで(0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下)の角に対する三角関数の値で表すことができる。

5 次の値を求めよ。

(1) $\sin\dfrac{9}{4}\pi$, $\cos\dfrac{9}{4}\pi$　　(2) $\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)$, $\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)$　　(3) $\sin\dfrac{7}{6}\pi$, $\cos\dfrac{7}{6}\pi$

Point Pickup

$\theta+2n\pi$, $-\theta$, $\theta+\pi$ の三角関数

$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$　　$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$　　$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(-\theta)=\cos\theta$　　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$　　$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$　　$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

（n は整数）

第 8 講 PART5 確認問題

1 $\sin(\theta+2n\pi)=$ ア , $\cos(\theta+2n\pi)=$ イ を利用すると,

$\sin\dfrac{17}{6}\pi=$ ウ , $\cos\dfrac{17}{6}\pi=$ エ である。

[ア イ の選択肢]

① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\cos\theta$　④ $-\cos\theta$

[ウ エ の選択肢]

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $-\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2 $\sin(-\theta)=$ オ , $\cos(-\theta)=$ カ を利用すると,

$\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)=$ キ , $\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)=$ ク である。

[オ カ の選択肢]

① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\cos\theta$　④ $-\cos\theta$

[キ ク の選択肢]

① 1　② -1　③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

④ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

3 $\sin(\theta+\pi)=$ ケ ，$\cos(\theta+\pi)=$ コ を利用すると，

$\sin\frac{4}{3}\pi=$ サ ，$\cos\frac{4}{3}\pi=$ シ である。

[ケ コ の選択肢]

① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\cos\theta$　④ $-\cos\theta$

[サ シ の選択肢]

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

[MEMO]

第 9 講　三角関数のグラフ

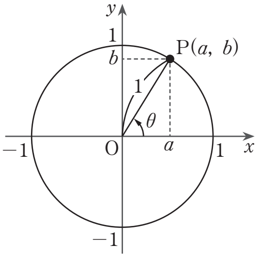
PART1　三角関数のグラフ

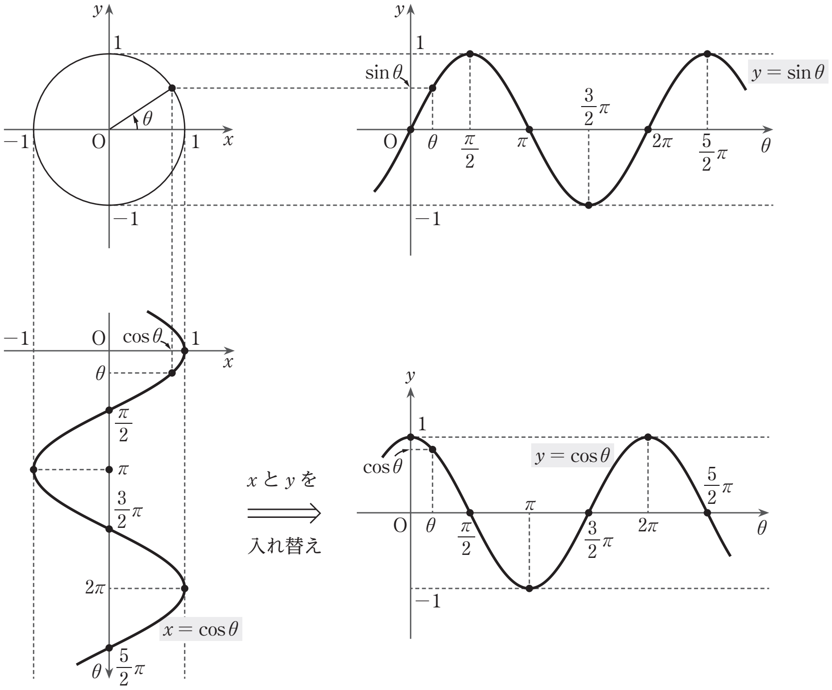
要点①　$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフ

右図のように，角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると $\sin\theta=b$，$\cos\theta=a$ である。このことから，θ の関数

$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$

のグラフをかくことができる。





$\theta+2\pi$ の動径は θ の動径と一致する。よって，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフは，ともに「　　」ごとに同じ形を繰り返す。一般に，関数 $y=f(x)$ について，0 でない定数 p に対し，等式 $f(x+p)=f(x)$ がすべての x に対して成り立つとき，$f(x)$ を，p を「　　　」とする「　　　　　」という。

関数 $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ は，いずれも　　を周期とする周期関数である。

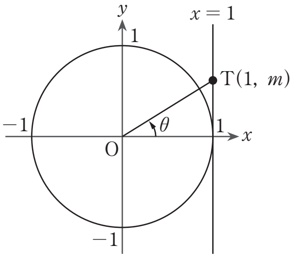
※4π や -2π なども $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ の周期であるが，周期は，ふつう「正の周期のうちで最小のもの」をさす。

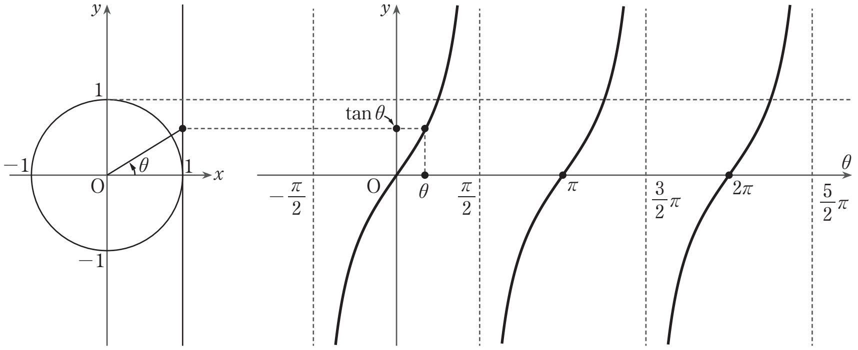
要点② $y=\tan\theta$ のグラフ

右図のように，角 θ の動径と直線 $x=1$ との交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると，$\tan\theta=m$ である。このことから，θ の関数

$$y=\tan\theta$$

のグラフをかくことができる。





$y=\tan\theta$

$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ が成り立つことから，関数 $y=\tan\theta$ は，　　を周期とする周期関数であり，π ごとに同じ形を繰り返す。

$\tan\theta$は，$\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$（$n$ は整数）では定義されない。関数 $y=\tan\theta$ のグラフは，θ が $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ に近づくと直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ に限りなく近づく。

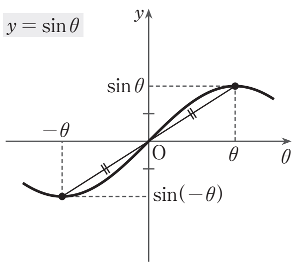
グラフが限りなく近づく直線を，そのグラフの「　　　」という。

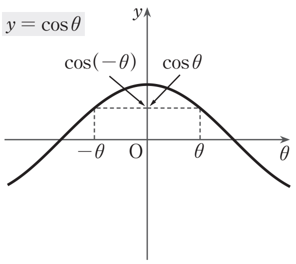
要点③ 三角関数のグラフの特徴

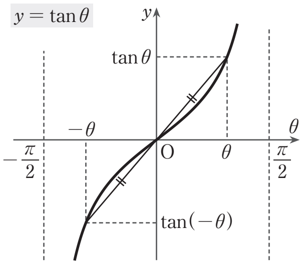
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ より，次のことがいえる。

・$y=\sin\theta$，$y=\tan\theta$ のグラフは，「原点に関して対称」である。

・$y=\cos\theta$ のグラフは，「y 軸に関して対称」である。







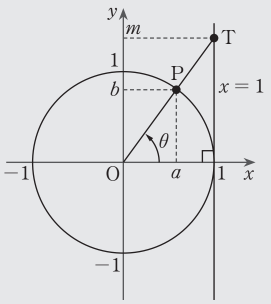
1 次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y = \sin\theta$　　(2)　$y = \cos\theta$　　(3)　$y = \tan\theta$

Point Pickup

関数 $y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$，$y = \tan\theta$ のグラフ

単位円において，x 軸の正の部分を始線とする角 θ の動径と円との交点を $\mathrm{P}(a,\ b)$，直線 $x = 1$ との交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると



$y = \sin\theta$ の y 座標は b

$y = \cos\theta$ の y 座標は a

$y = \tan\theta$ の y 座標は m

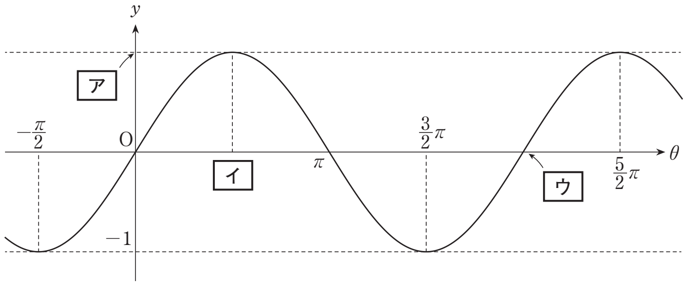
θ を増加させたときの y 座標の増減を意識し，グラフをかく。

$y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$ の周期は 2π，$y = \tan\theta$ の周期は π である。
グラフをかくときは，最低「1 周期分」はかく。

第 9 講 PART1 確認問題

次の関数のグラフをかくとき，空欄に当てはまるものを，下の①～⑨のうちから選べ。

1 $y = \sin\theta$

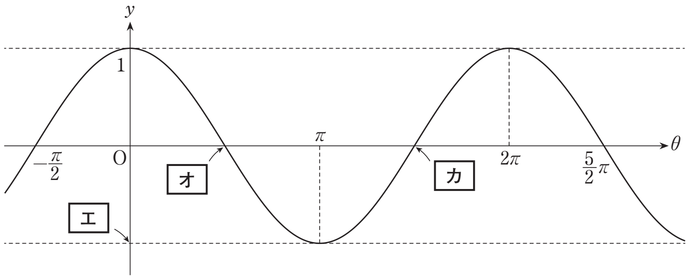


① 0　② 1　③ -1

④ 2π　⑤ 3π　⑥ $\frac{\pi}{2}$

⑦ $\frac{\pi}{3}$　⑧ $\frac{\pi}{4}$　⑨ $\frac{5}{3}\pi$

2 $y = \cos\theta$

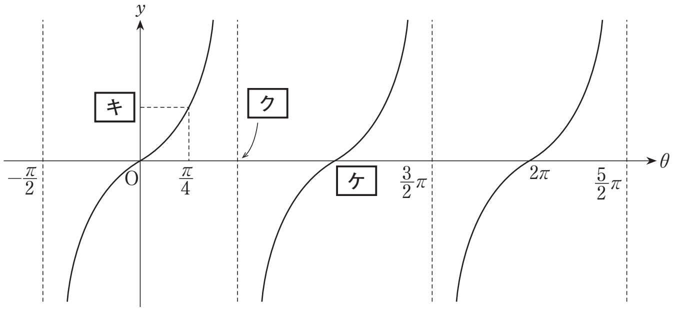


① 0　② 1　③ -1

④ $\frac{\pi}{2}$　⑤ $\frac{\pi}{3}$　⑥ $\frac{\pi}{4}$

⑦ $\frac{5}{4}\pi$　⑧ $\frac{3}{2}\pi$　⑨ $\frac{7}{4}\pi$

3 $y = \tan\theta$



① 0　　② 1　　③ -1

④ π　　⑤ 2π　　⑥ $\dfrac{\pi}{2}$

⑦ $\dfrac{\pi}{3}$　　⑧ $\dfrac{3}{4}\pi$　　⑨ $\dfrac{5}{4}\pi$

[MEMO]

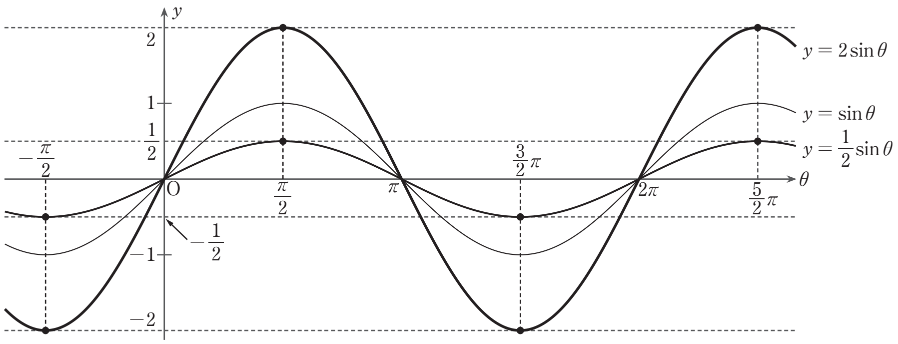
PART2 いろいろな三角関数のグラフ

要点① 関数 $y=a\sin\theta$ のグラフ

関数 $y=2\sin\theta$，$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ のグラフについて考える。

関数 $y=2\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとに y 軸方向に「　倍に拡大」したものである。また $y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとに y 軸方向に「　倍に縮小」したものである。

$y=2\sin\theta$，$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ の周期は，$y=\sin\theta$ の周期と同じく「　　」である。

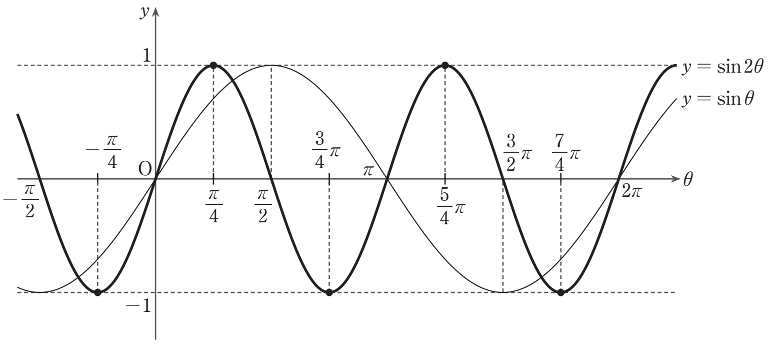


要点② 関数 $y=\sin k\theta$ のグラフ

関数 $y=\sin 2\theta$ のグラフについて考える。

$\theta=\dfrac{\alpha}{2}$ のときの $\sin 2\theta$ の値は，$\theta=\alpha$ のときの $\sin\theta$ の値に等しい。よって，関数 $y=\sin 2\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとに θ 軸方向に「　倍に　　」したものである。

$y=\sin 2\theta$ の周期は，「2π　　＝　」である。



一般に，k を正の定数とするとき，次のことが成り立つ。

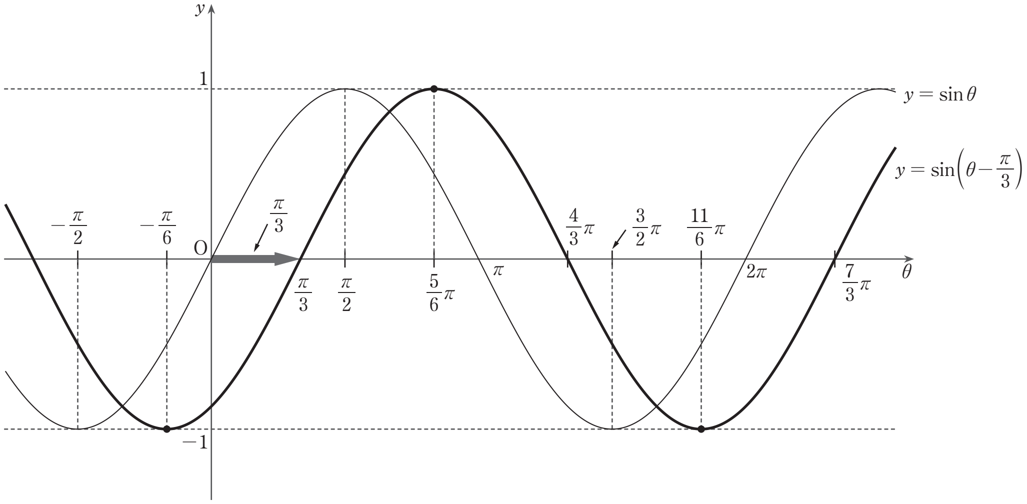
> 関数 $y=\sin k\theta$，$y=\cos k\theta$ の周期はいずれも $\dfrac{2\pi}{k}$
>
> 関数 $y=\tan k\theta$ の周期は $\dfrac{\pi}{k}$

要点 ③　関数 $y=\sin(\theta-p)$ のグラフ

関数 $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフについて考える。

このグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に「　」だけ「　　　　」したものである。

$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ の周期は，$y=\sin\theta$ の周期と同じく「　」である。



2 (1) 次の □ にあてはまるものを，下の①～⑦から選べ。ただし，同じものを選んでもよいとする。

(i) 関数 $y=2\cos\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを [ア] 軸方向に [イ] 倍したものである。また，その周期は [ウ] である。

(ii) 関数 $y=\cos 2\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを [エ] 軸方向に [オ] 倍したものである。また，その周期は [カ] である。

(iii) 関数 $y=\tan\dfrac{\theta}{2}$ の周期は [キ] である。

① θ　② y　③ 2　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 2π　⑥ π　⑦ $\dfrac{\pi}{2}$

(2) $y=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

Point Pickup

いろいろな三角関数のグラフ

$y=a\sin\theta\ (a>0)$ …… $y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に a 倍

周期は 2π

$y=\sin k\theta\ (k>0)$ …… $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ 倍

周期は $2\pi\times\dfrac{1}{k}=\dfrac{2\pi}{k}$

$y=\sin(\theta-p)$ …… $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に p だけ平行移動

周期は 2π

第 9 講　PART2 確認問題

1 関数 $y=3\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを [ア] 軸方向に [イ] 倍したものである。また，その周期は [ウ] である。

① θ　② y　③ 1
④ 3　⑤ $\frac{1}{3}$　⑥ π
⑦ $\frac{\pi}{2}$　⑧ 2π　⑨ 4π

2 関数 $y=\cos\frac{\theta}{2}$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを [エ] 軸方向に [オ] 倍したものである。また，その周期は [カ] である。

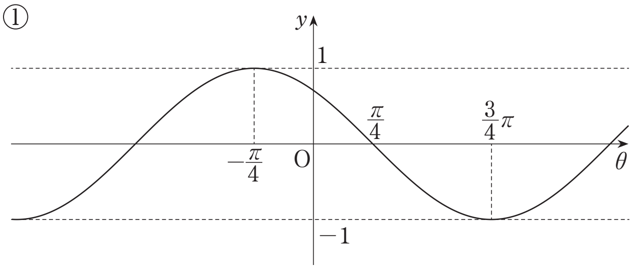
① θ　② y　③ 1
④ 2　⑤ $\frac{1}{2}$　⑥ π
⑦ $\frac{\pi}{2}$　⑧ 2π　⑨ 4π

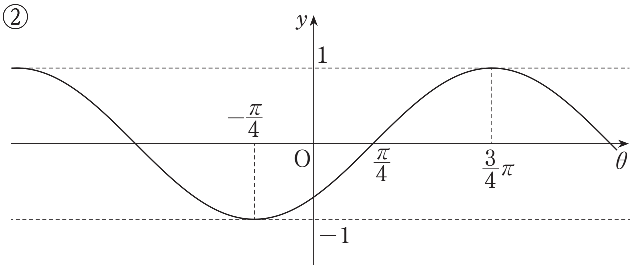
3 関数 $y=\tan 2\theta$ のグラフの周期は [キ] である。

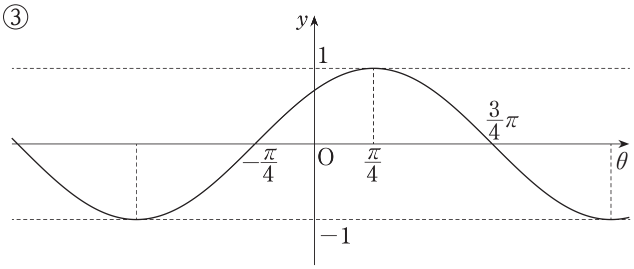
① θ　② y　③ 1
④ 2　⑤ $\frac{1}{2}$　⑥ π
⑦ $\frac{\pi}{2}$　⑧ 2π　⑨ 4π

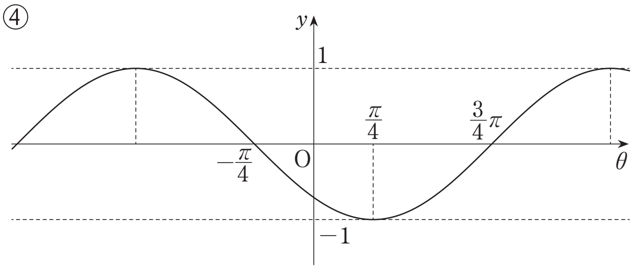
4 関数 $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，［ク］である。また，その周期は［ケ］である。

［［ク］の選択肢］

①


②


③


④


［［ケ］の選択肢］

① π　　② $\dfrac{\pi}{2}$　　③ 2π　　④ 4π

[MEMO]

第10講　三角関数を含む方程式，不等式

PART1　三角関数を含む方程式

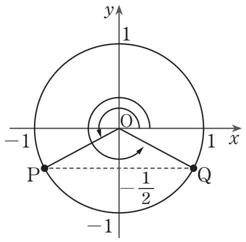
要点 ①　$\sin\theta$，$\cos\theta$ を含む方程式

　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求める。

単位円の円周上で「　座標」が $-\dfrac{1}{2}$ となる点は，右図の P，Q

である。よって求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では $\theta =$ 　　，　　　である。



一般に

　方程式 $\sin\theta = a$ を満たす θ は，単位円の円周上で「　座標」が a になる点

　方程式 $\cos\theta = b$ を満たす θ は，単位円の円周上で「　座標」が b になる点

を考えればよい。

要点 ②　$\tan\theta$ を含む方程式

　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\tan\theta = -\sqrt{3}$ を満たす θ を求める。

「直線　　　」上に，「　座標」が $-\sqrt{3}$ となる点 T をとり，

直線 OT と単位円の交点を右図のように P，Q とすると，

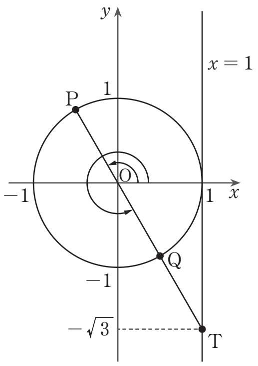
求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では　$\theta =$ 　　，　　　である。

一般に，方程式 $\tan\theta = c$ を満たす θ は，直線　　　上に

点 T$(1,\ c)$ をとり，直線 OT と単位円の交点を考えれば

よい。



[MEMO]

1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Point Pickup

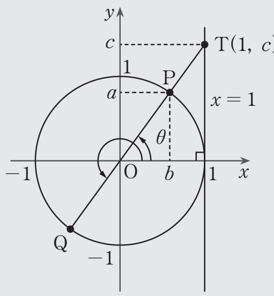
三角関数を含む方程式（三角方程式）の解法

$\sin\theta = a$　……　単位円の円周上で，y 座標が a となる点

$\cos\theta = b$　……　単位円の円周上で，x 座標が b となる点

$\tan\theta = c$　……　直線 $x = 1$ 上に点 T$(1,\ c)$ をとり，直線 OT と単位円の交点

である点 P，Q を図示し，動径 OP，OQ の表す角を，与えられた θ の変域内で求める。



第10講　PART1 確認問題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。ただし，番号は小さい方から順に答えよ。

1 $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

$\theta =$ ア ，イ

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$

④ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑤ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑥ $\dfrac{5}{6}\pi$

⑦ $\dfrac{7}{6}\pi$　⑧ $\dfrac{5}{4}\pi$　⑨ $\dfrac{7}{4}\pi$

2 $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta =$ ウ ，エ

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$

④ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑤ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑥ $\dfrac{5}{6}\pi$

⑦ $\dfrac{7}{6}\pi$　⑧ $\dfrac{5}{4}\pi$　⑨ $\dfrac{7}{4}\pi$

3 $\tan\theta = 1$

$\theta =$ オ ，カ

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$

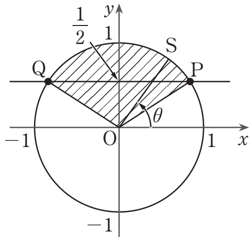
④ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑤ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑥ $\dfrac{5}{6}\pi$

⑦ $\dfrac{7}{6}\pi$　⑧ $\dfrac{5}{4}\pi$　⑨ $\dfrac{7}{4}\pi$

PART2 三角関数を含む不等式

要点 ① $\sin\theta$ を含む不等式

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求める。



単位円の円周上で，y 座標が $\dfrac{1}{2}$ となる点は，右図の P，Q であり，

動径 OP，OQ の表す角は，それぞれ $\theta =$　　，　　である。

与えられた不等式を満たす θ を表す動径を OS とすると，

S の y 座標が $\dfrac{1}{2}$ 以上になるのは，斜線部分の扇形 OPQ において，S が弧 PQ 上(P，Q を含む)

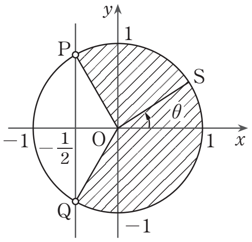
にあるときである。

よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲において，求める θ の値の範囲は

である。

要点 ② $\cos\theta$ を含む不等式

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta > -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求める。



単位円の円周上で，x 座標が $-\dfrac{1}{2}$ となる点は，右図の P, Q であり，

動径 OP，OQ の表す角は，それぞれ $\theta =$　　，　　である。

与えられた不等式を満たす θ を表す動径を OS とすると，

S の x 座標が $-\dfrac{1}{2}$ より大きくなるのは，斜線部分の扇形 OPQ において，S が弧 PQ 上(P，Q を含まない)にあるときである。

よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲において，求める θ の値の範囲は

である。

【MEMO】

2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Point Pickup

三角関数を含む不等式(三角不等式)の解法

・不等式における不等号(＞，≧，＜，≦)を，等号(＝)に変えた「方程式」を，単位円を用いて解く。

・その単位円において, 不等式を満たす θ の値の範囲を, 不等号の向きに注意して求める。与えられた変域によって，解となる θ の値の範囲が複数に分かれることがある。

第10講 PART2 確認問題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

1 $\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ア

① $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi < \theta < 2\pi$　② $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3}{4}\pi$

③ $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$　④ $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{7}{4}\pi$

⑤ $0 \leqq \theta < \dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi$　⑥ $\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi$

2 $\cos\theta < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

イ

① $0 \leqq \theta < \dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$　② $\dfrac{4}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{3}\pi$

③ $0 \leqq \theta < \dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{7}{6}\pi < \theta < 2\pi$　④ $\dfrac{5}{6}\pi < \theta < \dfrac{7}{6}\pi$

⑤ $0 \leqq \theta < \dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$　⑥ $\dfrac{7}{6}\pi < \theta < \dfrac{11}{6}\pi$

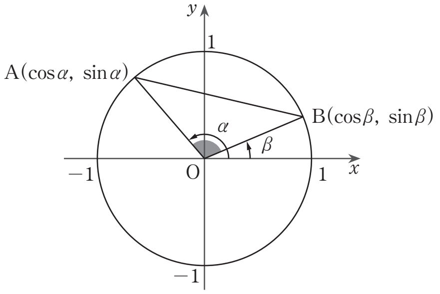
第 11 講　加法定理

PART1 正弦・余弦の加法定理

要点① 正弦・余弦の加法定理

ここでは，$\sin(\alpha+\beta)$ のように，角が 2 つの角の和 $\alpha+\beta$ や差 $\alpha-\beta$ で表された三角関数(正弦，余弦)を，それぞれの角の三角関数 $\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\alpha$，$\cos\beta$ で表す。

右図の単位円において，角 α，角 β の動径をそれぞれ OA，OB とすると，
A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$ である。



線分 AB の長さを 2 通りの方法で表す。
2 点間の距離の公式より

$$\mathrm{AB}^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2$$
$$=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\quad\cdots\cdots\ ①$$

$\angle\mathrm{AOB}=\alpha-\beta$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ で余弦定理を用いて

$$\mathrm{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)\quad\cdots\cdots\ ②$$

①，②より　$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$

よって，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　$\cdots\cdots$　(i)

(i)において，β を $-\beta$ におき換えると

$$\cos\{\alpha-(-\beta)\}=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\quad\cdots\cdots\ \text{(ii)}$$

(i)において，α を $\frac{\pi}{2}-\alpha$ におき換えると

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

ここで，$\cos\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\sin(\alpha+\beta)$，

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ より

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots \quad \text{(iii)}$$

(iii)において，β を $-\beta$ におき換えると

$$\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots \quad \text{(iv)}$$

(i)～(iv)より，以下の定理が成り立つ。

正弦・余弦の加法定理

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

例　$\sin 105^\circ=\sin(\qquad\qquad)$

$=$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15^\circ=\cos(\qquad\qquad)$

$=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

1　α は第 1 象限の角，β は第 3 象限の角であるとする。$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{12}{13}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(2)　$\cos(\alpha+\beta)$

(3)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(4)　$\cos(\alpha-\beta)$

Point Pickup

正弦・余弦の加法定理

1　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

4　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

正弦・余弦の加法定理，および $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して，角が和・差で表された三角関数(正弦・余弦)の値を求めることができる。

第11講 PART1 確認問題

α は第 1 象限の角，β は第 2 象限の角であるとする。

$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

1 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$

2 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$

3 $\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{\boxed{カキ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケコ}}$

4 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{スセ}}$

PART2 正接の加法定理，2 直線のなす角

要点 ① 正接の加法定理

正弦・余弦の加法定理から，正接の加法定理を導く。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

分母，分子をそれぞれ $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

よって $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ ……（i）

（i）において，β を $-\beta$ におき換えると

$$\tan\{\alpha+(-\beta)\}=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ より

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\quad\cdots\cdots\quad\text{(ii)}$$

（i），（ii）より，以下の定理が成り立つ。

正接の加法定理

1　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

2　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

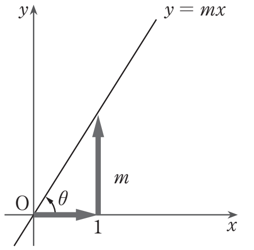
例　$\tan75^\circ=\tan(\qquad\qquad)$

$$=\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

要点 ② 直線と x 軸のなす角，2 直線のなす角

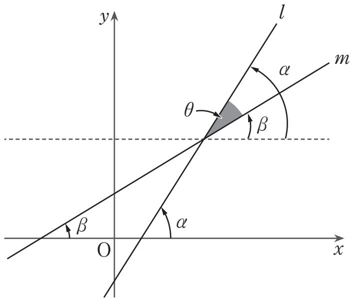
直線 $y=mx$ と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると，右図より



$$\text{直線の傾き}\ m=\frac{m}{1}=\tan\theta$$

つまり　$m=\tan\theta$ である。

右図のように，2 直線 l，m と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とすると，2 直線のなす角 θ は



$$\theta=$$

である。この角 θ について，正接の加法定理を用いると

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

となり，$\tan\theta$ の値は $\tan\alpha$，$\tan\beta$，すなわち 2 直線の傾きを用いて求めることができる。

一般に，互いに垂直でない 2 直線 $y=m_1x+n_1$ と $y=m_2x+n_2$ のなす角を θ とすると

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\quad\cdots\cdots\quad ①$$

が成り立つ。

2 直線のなす角 θ は，とくに断りがない限り $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で答える。①を満たす θ が $\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\pi$ となった場合は，$\pi-\theta$ を 2 直線のなす角として答える。

2　2 直線 $y=3x$ ……①，$y=\dfrac{1}{2}x$ ……② と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とする。

(1)　$\tan\alpha$，$\tan\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(3)　2 直線①，②のなす角 θ を求めよ。

Point Pickup

正接の加法定理

1　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

2　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

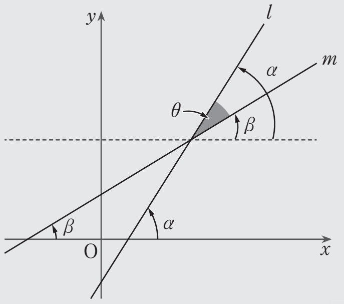
2 直線のなす角と正接の値

互いに垂直でない 2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とすると

$m_1=\tan\alpha$，$m_2=\tan\beta$

よって，この 2 直線のなす角を θ とすると

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$



第 11 講 PART2 確認問題

2 直線 $y=5x$ ……①，$y=\dfrac{2}{3}x$ ……② と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とする。

1 $\tan\alpha=\boxed{\text{ア}}$，$\tan\beta=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

2 $\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

3 2 直線①，②のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

PART3　2 倍角の公式，半角の公式

要点 ①　2 倍角の公式

正弦・余弦・正接の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

において，β を α におき換えると，次の公式が得られる。

2 倍角の公式

1　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

3　$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

この公式により，角が 2α の三角関数を，その半分の角 α の三角関数で表すことができる。

例　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ の値を求める。

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\alpha>0$ であるから　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

よって　$\sin 2\alpha=$　　　　　$=2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{24}{25}$

$\cos 2\alpha=$　　　　　$=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}-\dfrac{16}{25}=-\dfrac{7}{25}$

要点 ②　半角の公式

余弦の 2 倍角の公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ より

$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$　よって　$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$　よって　$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

が成り立つ。それぞれの式において，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ でおき換えると，次の公式が得られる。

半角の公式

1　$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

2　$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

この公式により，角が α の三角関数を，その倍の角 2α の三角関数で表すことができる。

例　$\sin\frac{\pi}{8}$，$\cos\frac{\pi}{8}$ の値を求める。

$$\frac{\pi}{8}=\underline{\qquad\qquad}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8}$　　より　$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\frac{\pi}{8}=\underline{\qquad\qquad}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\frac{\pi}{8}$　　より　$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

半角の公式 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ より

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

が得られる。また，2 倍角の公式 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ より

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2}$$

が得られる。

3　$0<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$

(2)　$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$

Point Pickup

2 倍角の公式

1　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

3　$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2 倍角の公式で，角が「半分」の三角関数で表すことができる。

半角の公式

1　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

2　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

3　$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

半角の公式で，角が「2 倍」の三角関数で表すことができる。

※ $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$

第11講　PART3 確認問題

$0<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

1　$\sin 2\alpha=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$

2　$\cos 2\alpha=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$

3　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}$

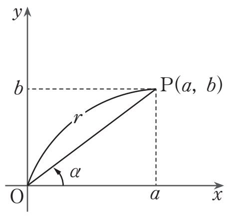
4　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}$

PART4 三角関数の合成

要点 ① 三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を，加法定理を用いて変形することで，1 つの三角関数で表す。

$a\sin\theta+b\cos\theta$ に対し，座標平面上に点 P$(a,\ b)$ をとる。



線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α，線分 OP の長さを r とすると

$a=$　　　，$b=$

よって　$a\sin\theta+b\cos\theta=$　　　$\sin\theta+$　　　$\cos\theta$

$=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

ここで，正弦の加法定理 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ より

$\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha=$

また　$r=$

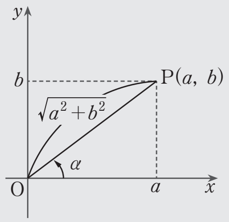
したがって　$a\sin\theta+b\cos\theta=$　　　　　　　と変形することができる。

このような変形を，「三角関数の　　」という。

三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$a\sin\theta+b\cos\theta$ の式から，座標平面上に点 P$(a,\ b)$ をとることで

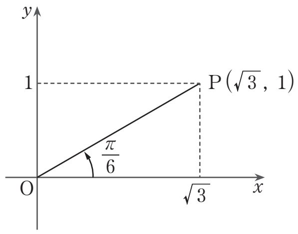
・三平方の定理より r を

・OP と x 軸の正の向きのなす角を考えることにより α を

それぞれ求めることができ，その r，α を用いて，$r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形することができる。

例　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を合成する。

点 P(　，　) をとると，OP $=$　　　　　$=\sqrt{4}=2$



線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると $\alpha=$

よって $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=$

4 (1) 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(i) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　(ii) $\sin\theta-\cos\theta$

(2) 関数 $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

Point Pickup

三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式に対し，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとり

・$r=\sqrt{a^2+b^2}$

・$\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$ となる α

を用いて $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形する。

特に断りがなければ，α は $-\pi<\alpha<\pi$ の範囲でとるとよい。

第11講 PART4 確認問題

1 $3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

$$3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$$

2 $-\sin\theta+\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

$$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\sin\left(\theta+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi\right)$$

3 関数 $y=2\sin\theta+\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，最小値 $-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$

[MEMO]

第 12 講　指数の拡張

PART1　0 や負の整数の指数

要点①　a^0，a^{-n} の定義と指数法則

n が正の整数のとき，a^n は「a を n 個掛けたもの」であり，n を「指数」という。

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{n\text{個}}$$

また，a^1，a^2，……を a の「累乗」という。

$a \neq 0$ で，m，n が正の整数のとき，次の法則が成り立つ。

指数法則

1　$a^m a^n = a^{m+n}$　　$a^2 \times a^3 = a^5$

2　$(a^m)^n = a^{mn}$　　$(a^2)^3 = a^6$

3　$(ab)^n = a^n b^n$　　$(ab)^2 = a^2 b^2$

また，$m > n$ のとき $a^m \div a^n = a^{m-n}$ である。例えば，$a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$ である。

ここでは，指数が 0 や負の整数の場合でも上の指数法則が成り立つように，累乗 a^n の意味を定める。

$n = 0$ のとき，指数法則 **1**　$a^m a^n = a^{m+n}$　が成り立つとすると

$a^m a^0 = a^{m+0} = a^m$　　よって　$a^0 =$

$m = -n$ のとき，指数法則 **1**　$a^m a^n = a^{m+n}$　が成り立つとすると

$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 =$　　よって　$a^{-n} a^n = 1$　より　$a^{-n} =$

よって，指数が 0 や負の整数のときの累乗を，次のように定める。

a^0，a^{-n} の定義

$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき

$$a^0 = 1,\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

この定義により，m，n が正の整数のときだけでなく，0 や負の整数のときも，指数法則 **1** ～ **3** が成り立つ。

例　$a^3a^{-2}=a^3\times\quad\quad=a^1=a^{3+(-2)}$　　よって　$a^3a^{-2}=a^{3+(-2)}$

$(a^3)^{-2}=\quad\quad=\dfrac{1}{a^6}=a^{-6}=a^{3\times(-2)}$　　よって　$(a^3)^{-2}=a^{3\times(-2)}$

$(ab)^{-3}=\quad\quad=\dfrac{1}{a^3b^3}=\dfrac{1}{a^3}\times\dfrac{1}{b^3}=a^{-3}b^{-3}$　　よって　$(ab)^{-3}=a^{-3}b^{-3}$

また，m，n が整数のとき，以下が成り立つ。

$$a^m\div a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^m\times\frac{1}{a^n}=a^ma^{-n}=a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^n(b^{-1})^n=a^nb^{-n}=\frac{a^n}{b^n}$$

これまでのことから，以下の指数法則が成り立つ。

指数法則（指数が整数）

$a\neq 0$，$b\neq 0$ で，m，n が整数のとき

1　$a^ma^n=a^{m+n}$　　**1’**　$a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

2　$(a^m)^n=a^{mn}$

3　$(ab)^n=a^nb^n$　　**3’**　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

1 次の計算をせよ。

(1) $a^5 \times a^{-3}$　　(2) $a^{-6} \div a^{-2} \times a^4$

(3) $(a^{-3})^{-4}$　　(4) $(a^4 b^{-3})^{-2}$

Point Pickup

指数の拡張と指数法則（指数が整数）

$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき　$a^0 = 1$，$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n が整数のとき

1　$a^m a^n = a^{m+n}$　　**1’**　$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2　$(a^m)^n = a^{mn}$

3　$(ab)^n = a^n b^n$　　**3’**　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

第12講 PART1 確認問題

次の計算をせよ。

1 $a^6 \times a^{-3} = a^{\boxed{ア}}$

2 $a^{-3} \div a^{-5} \times a^4 = a^{\boxed{イ}}$

3 $(a^{-2})^{-5} = a^{\boxed{ウエ}}$

4 $(a^3 b^{-4})^{-2} = a^{\boxed{オカ}} b^{\boxed{キ}}$

$$= \frac{b^{\boxed{ク}}}{a^{\boxed{ケ}}}$$

PART2 累乗根

要点 ① 累乗根

正の整数 n に対し，n 乗して a になる数，すなわち

方程式 $x^n = a$ の解 x

を，a の「　　　」といい，a の 2 乗根(平方根)，3 乗根(立方根)，4 乗根，……を，a の「　　　」という。

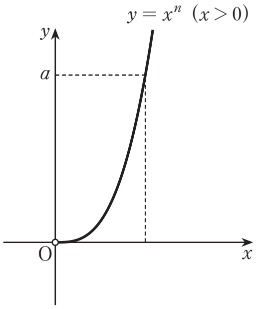
例 $2^3 = 8$ より，2 は 8 の「　　　」

$(-2)^5 = -32$ より，-2 は -32 の「　　　」

$2^4 = 16$，$(-2)^4 = 16$ より，2 と -2 はともに 16 の「　　　」

以下では，正の数 a の n 乗根のうち，「正であるもの」について考える。
つまり，方程式 $x^n = a$ $(a > 0)$の解のうち，$x > 0$ であるものを考える。

関数 $y = x^n$ $(x > 0)$のグラフは右図のようになる。
このグラフで，$y = a$ を満たす x が，a の正の n 乗根であり，
グラフよりそれはただ 1 つである。
この a の正の n 乗根を「　　」と表す。



例 $\sqrt[3]{8}$ は「3 乗して 8 になる数のうち，正のもの」

$8 = \quad^3$ より，それは　である。　　よって　$\sqrt[3]{8} =$

※$\sqrt[2]{a}$ はこれまで通り $\sqrt{a}$ と表す。また，$\sqrt[n]{0} = 0$ と定める。

$a > 0$，n が正の整数のとき，$\sqrt[n]{a}$ は

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,\ \sqrt[n]{a} > 0$$

を満たすただ 1 つの数である。また

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

が成り立つ。

例 $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} =$

要点② 累乗根の性質

累乗根について，次の性質が成り立つ。

累乗根の性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n，p が正の整数のとき

1 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

2 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

4 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

5 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

（**1** の証明）

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\quad=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=$

$\sqrt[n]{a}>0$，$\sqrt[n]{b}>0$ であるから，$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$

よって，$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ は，n 乗して ab となる正の数，すなわち ab の正の n 乗根である。

したがって $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

例 $\sqrt[5]{2}\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{2\times3}=\sqrt[5]{6}$

$\dfrac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{10}{2}}=\sqrt[4]{5}$

$(\sqrt[3]{5})^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$

$\sqrt{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[2\times3]{7}=\sqrt[6]{7}$

$\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3\times2]{3^{1\times2}}=\sqrt[3]{3}$

2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[3]{24}$　(2) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}$　(3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$　(5) $(\sqrt[6]{9})^3$

Point Pickup

累乗根とその性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n，p が正の整数のとき

$(\sqrt[n]{a})^n=a$，$\sqrt[n]{a}>0$，$\sqrt[n]{a^n}=a$

1 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　**2** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　**3** $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

4 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　**5** $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

第12講 PART2 確認問題

次の計算をせよ。

1 $\sqrt[3]{54} = \boxed{ア}\sqrt[\boxed{イ}]{\boxed{ウ}}$

2 $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{8} = \boxed{エ}$

3 $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} = \boxed{オ}$

4 $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \boxed{カ}$

5 $(\sqrt[6]{25})^3 = \boxed{キ}$

PART3 有理数の指数

要点① 有理数の指数

$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n が整数のとき，指数法則

1 $a^m a^n = a^{m+n}$　　**2** $(a^m)^n = a^{mn}$　　**3** $(ab)^n = a^n b^n$

が成り立つ。ここで，$a > 0$ として，指数法則**2**が，$m = \dfrac{3}{4}$，$n = 4$ のときに成り立つとすると

$$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^4 = a \qquad = a^3$$

よって，$a^{\frac{3}{4}}$ は a^3 の正の 4 乗根，すなわち　　　であるから，$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$ となる。

そこで，指数が有理数である累乗について，次のように定める。

> $a > 0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき
>
> $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$　とくに　$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$，$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

※ $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$ と表される。

例　$81^{\frac{3}{4}} = \qquad = \qquad = (\sqrt[4]{3^4})^3 = 3^3 = 27$

$27^{-\frac{1}{3}} = \qquad = \dfrac{1}{\qquad} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{1}{3}$

$\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^2} = $

指数が有理数である累乗を上記のように定めると，次の指数法則が成り立つ。

> **指数法則（指数が有理数）**
>
> $a > 0$，$b > 0$ で，r，s が有理数のとき
>
> **1** $a^r a^s = a^{r+s}$　　**1’** $a^r \div a^s = \dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
>
> **2** $(a^r)^s = a^{rs}$
>
> **3** $(ab)^r = a^r b^r$　　**3’** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

※上記の指数法則は，指数を「実数」の範囲まで広げてもそのまま成り立つ。

【MEMO】

3 (1) 次の値を求めよ。

(i) $8^{\frac{2}{3}}$　　(ii) $9^{-\frac{1}{2}}$

(2) 次の計算をせよ。

(i) $3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{5}{12}}$　　(ii) $\left(8^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{9}}$

(iii) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[6]{5}$　　(iv) $\sqrt[6]{32} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \div \sqrt[3]{2}$

Point Pickup

有理数を指数とする累乗

$a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad とくに \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

指数法則（指数が有理数）

$a>0$，$b>0$ で，r，s が有理数のとき

1 $a^r a^s = a^{r+s}$　　**1'** $a^r \div a^s = \dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

2 $(a^r)^s = a^{rs}$

3 $(ab)^r = a^r b^r$　　**3'** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

累乗根 $\sqrt[n]{a^m}$ を $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表し，指数法則を用いて計算する。

第12講 PART3 確認問題

次の値を求めよ。

1 $16^{\frac{3}{4}} = \boxed{ア}$

2 $8^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$

次の計算をせよ。

3 $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{2}{3}} \div 5^{\frac{1}{6}} = \boxed{エ}$

4 $\left(25^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$

5 $\sqrt[3]{7} \times \sqrt[4]{7} \div \sqrt[12]{7} = \sqrt{\boxed{キ}}$

6 $\sqrt[6]{81} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} \div \sqrt[12]{9} = \boxed{ク}$

第 13 講　指数関数

PART1　指数関数のグラフ

要点 ①　指数関数のグラフ

a を 1 でない正の定数とするとき，関数 $y=a^x$ を，a を「　」とする x の「　　　」という。

指数関数 $y=2^x$ のグラフについて考える。

$x=1,\ 2,\ 3$ のとき　$y=2,\ 4,\ 8$

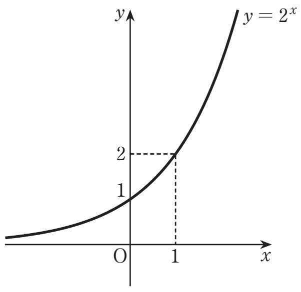
$x=0$ のとき　$y=2^0=$

$x=-1,\ -2,\ -3$ のとき　$y=2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3}=$

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$y=2^{\frac{1}{2}}=$

である。

x が無理数の場合も含め，x に対応する y の値を求め，$x,\ y$ の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点を座標平面上にとると，右図のような曲線が得られる。



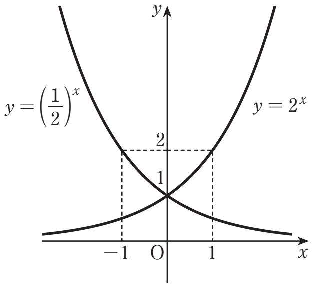
この曲線が，指数関数 $y=2^x$ のグラフである。

次に，指数関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフについて考える。この式は

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}=2$$

と変形できる。この式は，$y=2^x$ の式の x を $-x$ におき換えたものである。

よって，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは，$y=2^x$ のグラフと y 軸に関して対称であり，右図のようになる。



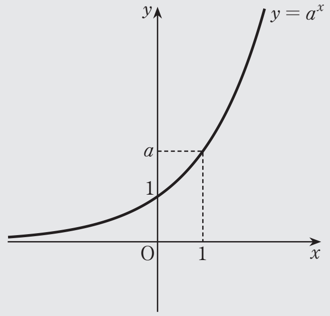
この曲線が，指数関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフである。

関数 $y=a^x$ のグラフと，関数 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフは，y 軸に関して対称である。

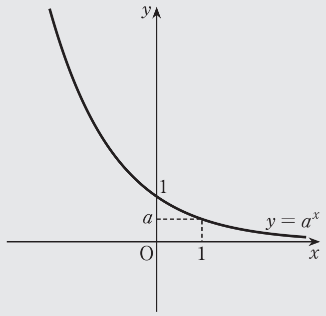
一般に，指数関数 $y=a^x$ のグラフは，以下のようになる。

指数関数のグラフ

$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき



・$a>1$，$0<a<1$ いずれの場合も，x 軸を漸近線としてもち，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。

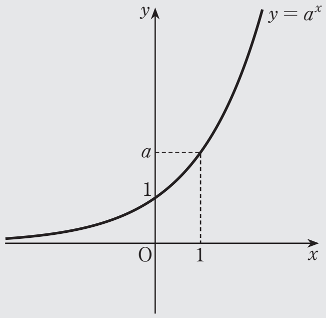
・$a>1$ のとき右上がりの曲線，$0<a<1$ のとき右下がりの曲線である。

1　関数 $y=3^x$ のグラフと関数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ のグラフを，同じ座標平面上にかけ。

Point Pickup

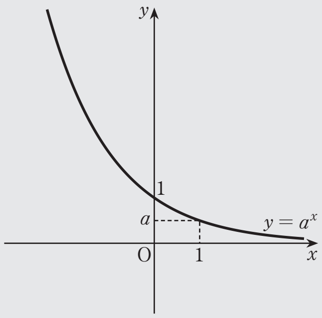
指数関数 $y=a^x$ のグラフ

$a>1$ のとき



右上がりの曲線

$0<a<1$ のとき



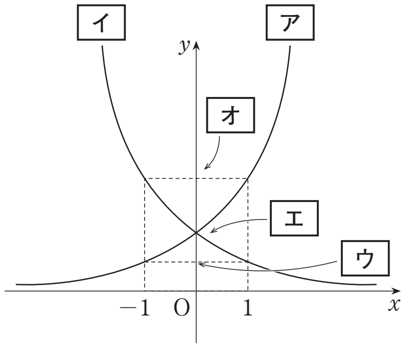
右下がりの曲線

ともに，x 軸を漸近線としてもち，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。

第13講　PART1 確認問題

1　関数 $y=2^x$ と $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかく。

［ア］，［イ］は，それぞれ関数 $y=2^x$ と $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のどちらのグラフか，選べ。また，図中の［ウ］～［オ］に当てはまる数を求めよ。



[［ア］，［イ］の選択肢]

① $y=2^x$　　② $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

[［ウ］～［オ］の選択肢]

① 1　　② 2　　③ 4　　④ $\frac{1}{2}$

PART2 指数関数の性質

要点① 指数関数の性質

指数関数 $y=a^x$ のグラフから，次のことがいえる。

指数関数の性質

1 定義域は実数全体，値域は正の数全体

2 $a>1$ のとき

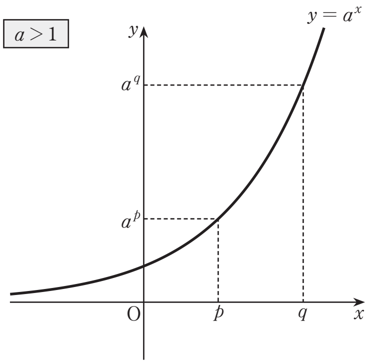
x の値が増加すると y の値も増加する。

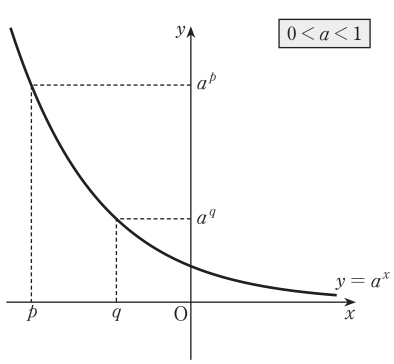
すなわち　$p<q \iff a^p<a^q$

$0<a<1$ のとき

x の値が増加すると y の値は減少する。

すなわち　$p<q \iff a^p>a^q$





x の値が増加すると y の値も増加する関数を「　　　」，x の値が増加すると y の値が減少する関数を「　　　」という。

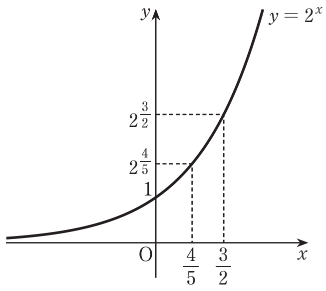
例 $\sqrt{8}$ と $\sqrt[5]{16}$ の大小を考える。

$\sqrt{8}=$　　$=$　　，$\sqrt[5]{16}=$　　$=$

指数の大小について　$\dfrac{4}{5}<\dfrac{3}{2}$

2 は　　　　　から　$2^{\frac{4}{5}}$　$2^{\frac{3}{2}}$

よって　$\sqrt[5]{16}<\sqrt{8}$



【MEMO】

2 次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1) $\frac{1}{9}$，$\sqrt[4]{27}$，1

(2) $\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$，$\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$

Point Pickup

指数で表された数の大小

指数で表された数の大小比較は，「底」をそろえた上で，指数の性質

$a > 1$ のとき　　$p < q \iff a^p < a^q$

$0 < a < 1$ のとき　　$p < q \iff a^p > a^q$

を利用して比較する。

第 13 講　PART2 確認問題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

1 $\frac{1}{8}$，$\sqrt[4]{32}$，1

［ア］

① $\frac{1}{8}<\sqrt[4]{32}<1$

② $\frac{1}{8}<1<\sqrt[4]{32}$

③ $\sqrt[4]{32}<\frac{1}{8}<1$

2 $\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$，$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$，$\sqrt{\frac{1}{2}}$

［イ］

① $\sqrt[5]{\frac{1}{4}}<\sqrt{\frac{1}{2}}<\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

② $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt[5]{\frac{1}{4}}<\sqrt{\frac{1}{2}}$

③ $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt{\frac{1}{2}}<\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$

PART3 指数関数を含む方程式・不等式

要点 ① 指数関数を含む方程式

a を 1 でない正の定数，すなわち $a>1$，$a \neq 1$ とするとき，以下のことがいえる。

指数の相等

$p=q \iff a^p=a^q$

このことを利用して，指数関数を含む方程式を解く。

例　方程式 $8^x=4$ を解く。

$8^x=$　　　$=$　　　，$4=$　　　であるから，与えられた方程式は

$2^{3x}=2^2$

よって　　　　　　　　したがって　$x=\dfrac{2}{3}$

このように，指数関数を含む方程式は，「　」をそろえ，$a^p=a^q$ の形を導くことで解くことができる。

要点 ② 指数関数を含む不等式

指数関数の大小に関する性質

$a>1$ のとき	$p<q$	$\iff$	$a^p<a^q$
$0<a<1$ のとき	$p<q$	$\iff$	$a^p>a^q$

を利用して，指数関数を含む不等式を解く。

例　不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\dfrac{1}{32}$ を解く。

$\dfrac{1}{32}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$　であるから，与えられた不等式は

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

底 $\dfrac{1}{2}$ は

[MEMO]

3 (1) 次の方程式を解け。

(i) $9^x = 243$　　(ii) $32^x = \dfrac{1}{16}$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $4^x < 64$　　(ii) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$

Point Pickup

指数関数を含む方程式

「底」をそろえて，指数の性質

$a > 0$，$a \neq 1$ のとき　$p = q \iff a^p = a^q$

を利用する。

指数関数を含む不等式

「底」をそろえて，指数関数の大小に関する性質

$a > 1$ のとき　$p < q \iff a^p < a^q$

$0 < a < 1$ のとき　$p < q \iff a^p > a^q$

を利用する。

第13講　PART3 確認問題

次の方程式を解け。

1　$4^x = 32$

$x = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2　$9^x = \dfrac{1}{27}$

$x = -\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

次の不等式を解け。

3　$3^x < 81$

$\boxed{オ}$

①　$x < 4$　　②　$x < 27$　　③　$x > 4$　　④　$x > 3$

4　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$

$\boxed{カ}$

①　$x \geqq 1$　　②　$x \geqq -1$　　③　$x \leqq 1$　　④　$x \leqq -2$

第 14 講　対数とその性質

PART1　対数

要点 ①　対数の定義

指数関数 $y=2^x$ は増加関数であり，値域は $y>0$ である。

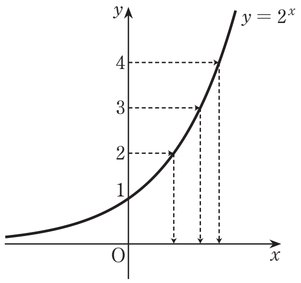
よって，どのような正の数 M に対しても

$M=2^x$　　つまり　$2^x=M$

を満たす実数 x がただ 1 つ定まる。例えば

$2^x=2$　より　$x=$　　　　$2^x=4$　より　$x=$

である。



$2^x=3$ を満たす x は確かに存在するが, その x は無理数, すなわち循環しない無限小数である。このような x を表すために，新しい記号を定義する。

一般に，$a>0$，$a\neq1$ とするとき，どのような正の数 M に対しても

$a^p=M$

を満たす実数 p がただ 1 つ定まる。この p の値を「　　　」と表し，a を「　」とする M の「　　」という。上記の $2^x=3$ を満たす x の値は　　　と表す。

また，$\log_a M$ における M を，この対数の「　　」という。対数の真数は，正の数である。

指数と対数

$a>0$，$a\neq1$，$M>0$ のとき

$a^p=M \iff p=\log_a M$

例　$2^4=16$　より

$\log_2\dfrac{1}{8}=-3$　より

対数 $\log_3 9$ の値を求める。

$\log_3 9=p$　とおくと　$3^p=9$　より　$3^p=3^2$　　よって　$p=2$

したがって　$\log_3 9=2$

$M=a^p$　のとき　$\log_a M=p$　であるから，次の等式が成り立つ。

$$\log_a a^p = p$$

この等式を用いると　$\log_3 9=\log_3$　　$=$　　である。

1 (1) 次の関係を $p=\log_a M$ の形にかけ。

(i) $2^6=64$　　(ii) $3^{-2}=\dfrac{1}{9}$　　(iii) $9^{\frac{1}{2}}=3$

(2) 次の関係を $a^p=M$ の形にかけ。

(i) $\log_5 125=3$　　(ii) $\log_7 \dfrac{1}{7}=-1$　　(iii) $\log_8 2=\dfrac{1}{3}$

(3) 次の対数の値を求めよ。

(i) $\log_{10} 1000$　　(ii) $\log_3 \sqrt{3}$　　(iii) $\log_4 \dfrac{1}{16}$

Point Pickup

指数と対数

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$ のとき

$$a^p=M \iff p=\log_a M$$

対数 $\log_a M$ の値は，「底 a を『何乗』すると真数 M になるか」という問いの答えである。

よって　$\log_a a^p=p$　である。

第 14 講 PART1 確認問題

答えに当てはまるものを，それぞれ①～④のうちから選べ。

1 $3^2=9$ を $p=\log_a M$ の形にかくと

$p=$ ア ，$a=$ イ ，$M=$ ウ

① $\frac{1}{2}$　② 2　③ 3　④ 9

2 $2^{-4}=\frac{1}{16}$ を $p=\log_a M$ の形にかくと

$p=$ エ ，$a=$ オ ，$M=$ カ

① $\frac{1}{16}$　② 2　③ 4　④ -4

3 $49^{\frac{1}{2}}=7$ を $p=\log_a M$ の形にかくと

$p=$ キ ，$a=$ ク ，$M=$ ケ

① $\frac{1}{2}$　② 2　③ 7　④ 49

4 $\log_2 32=5$ を $a^p=M$ の形にかくと

$a=$ コ ，$p=$ サ ，$M=$ シ

① $\frac{1}{2}$　② 2　③ 5　④ 32

5 $\log_{10}\dfrac{1}{100}=-2$ を $a^p=M$ の形にかくと

$a=$ ス，$p=$ セ，$M=$ ソ

① -2　② 2　③ 10　④ $\dfrac{1}{100}$

6 $\log_{81}3=\dfrac{1}{4}$ を $a^p=M$ の形にかくと

$a=$ タ，$p=$ チ，$M=$ ツ

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ 3　④ 81

次の対数の値を求めよ。

7 $\log_2 16=$ テ

8 $\log_5\sqrt{5}=\dfrac{\text{ト}}{\text{ナ}}$

9 $\log_3\dfrac{1}{27}=$ ニヌ

【MEMO】

PART2 対数の性質

要点 ① 対数の性質

$a^0=1$，$a^1=a$ より，次のことが成り立つ。

$$\log_a 1=0, \quad \log_a a=1$$

また，指数法則と対数の定義から，対数の性質が導かれる。

$p=\log_a M$，$q=\log_a N$ …… ① とすると，$a^p=M$，$a^q=N$

指数法則により　$MN=a^p a^q=a^{p+q}$

これを対数の記号を使って表すと　$\log_a MN=p+q$ …… ②

①，②より　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

指数法則により　$\dfrac{M}{N}=\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$

これを対数の記号を使って表すと　$\log_a \dfrac{M}{N}=p-q$ …… ③

①，③より　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

指数法則により　$M^k=(a^p)^k=a^{pk}$

これを対数の記号を使って表すと　$\log_a M^k=kp$ …… ④

①，④より　$\log_a M^k=k\log_a M$

対数の性質

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ のとき

1　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

2　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

3　$\log_a M^k=k\log_a M$　（k は実数）

例　$\log_2 6+\log_2 12-2\log_2 3=\log_2 6+\log_2 12-\log_2 3$

$$=\log_2 \qquad\qquad =\log_2 8=\log_2 2^3=3$$

[MEMO]

2 次の計算をせよ。

(1) $\log_8 2+\log_8 32$

(2) $\log_5 6-\log_5 30$

(3) $3\log_2 \sqrt[3]{6}-\log_2 3$

(4) $\log_3 \dfrac{\sqrt{6}}{3}+2\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6$

Point Pickup

対数の性質

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，k が実数のとき

1 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

1' $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

2 $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

2' $\log_a M-\log_a N=\log_a \dfrac{M}{N}$

3 $\log_a M^k=k\log_a M$

3' $k\log_a M=\log_a M^k$

対数の計算においては，「**1'**，**2'**，**3'** を用いて1つの対数にまとめていく」または，「**1**，**2**，**3** を用いて分けていく」のいずれかの手法をとる。

第 14 講　PART2 確認問題

次の計算をせよ。

1 $\log_6 4+\log_6 9=$ [ア]

2 $\log_2 3-\log_2 24=$ [イウ]

3 $2\log_3 \sqrt{15}-\log_3 5=$ [エ]

4 $\log_2 \dfrac{\sqrt{5}}{2}+6\log_2 \sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\log_2 5=$ [オ]

PART3 底の変換公式

要点 ① 底の変換公式

1024 に関して，$\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$ である。

このように，ある正の数 M に関して，底を c とする対数 $\log_c M$ の値を求めることを，

底を c とする対数を「　　」という。

対数をとることによって，a を底とする対数 $\log_a b$ を，c を底とする対数で表す。

$\log_a b = p$ とすると　$a^p = b$

c を底とする両辺の対数をとると

$$a^p = \qquad b$$

$$\qquad \log_c a = \log_c b$$

$a \neq 1$ より $\log_c a \neq 0$　よって　$p = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

したがって　$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

底の変換公式

a，b，c が正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

例　$\log_9 27 = \dfrac{\log_3 \quad}{\log_3 \quad} = \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \dfrac{3}{2}$

とくに，a，b が正の数で，$a \neq 1$，$b \neq 1$ のとき，$\log_a b = \dfrac{\log_b \quad}{\log_b \quad} = \dfrac{\quad}{\log_b a}$ より

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

が成り立つ。

[MEMO]

3 (1) 次の値を求めよ。

(i) $\log_{16} 8$　　(ii) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$

(2) 次の計算をせよ。

(i) $\log_2 5 \cdot \log_5 32$　　(ii) $\log_9 49 - \log_3 63$

Point Pickup

底の変換公式

a，b，c が正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \text{とくに，} b \neq 1 \text{ のとき} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

底がそろっていないときの対数の計算は，底の変換公式で底をそろえて行うとよい。

第 14 講　PART3 確認問題

次の値を求めよ。

1　$\log_{25} 125 = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2　$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8} = -\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

次の計算をせよ。

3　$\log_3 5 \cdot \log_5 81 = \boxed{オ}$

4　$\log_2 24 - \log_4 9 = \boxed{カ}$

第 15 講　対数関数

PART1　対数関数のグラフ

要点 ①　対数関数のグラフ

a を 1 でない正の定数とするとき, 関数 $y=\log_a x$ を, a を「　」とする x の「　　　　」という。

対数関数 $y=\log_2 x$ のグラフについて考える。

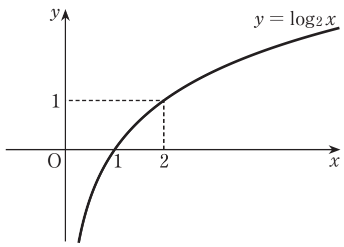
$x=2,\ 4,\ 8$ のとき　$y=\quad,\quad,$

$x=1$ のとき　$y=\log_2 1=$

$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8}$ のとき　$y=\quad,\quad,$

である。

x が無理数の場合も含め，x に対応する y の値を求め，x，y の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点を座標平面上にとると，右図のような曲線が得られる。この曲線が，対数関数 $y=\log_2 x$ のグラフである。

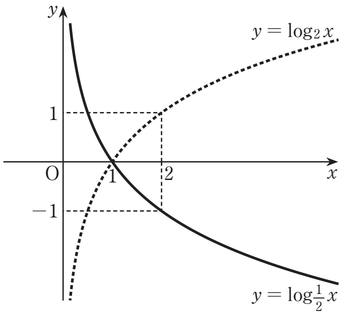


次に，対数関数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフについて考える。この式は

$$y=\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}=\frac{\log_2 x}{-1}=-\log_2 x\qquad つまり\qquad =\log_2 x$$

と変形できる。この式は，$y=\log_2 x$ の y が $-y$ に置き換わったものである。

よって，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフと x 軸について対称であり，右図のようになる。この曲線が，対数関数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフである。

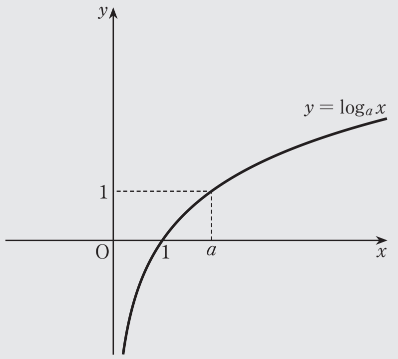


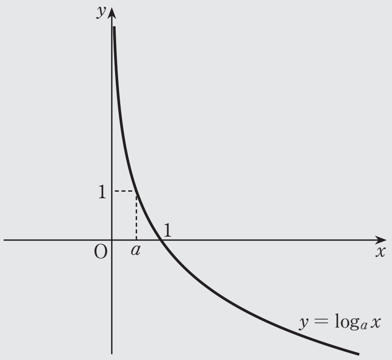
関数 $y=\log_a x$ のグラフと，関数 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ のグラフは，x 軸に関して対称である。

一般に，対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは，以下のようになる。

対数関数のグラフ

$a>1$ のとき　　　　　　$0<a<1$ のとき





・$a>1$，$0<a<1$ いずれの場合も，y 軸を漸近線としてもち，点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る。

・$a>1$ のとき右上がりの曲線，$0<a<1$ のとき右下がりの曲線である。

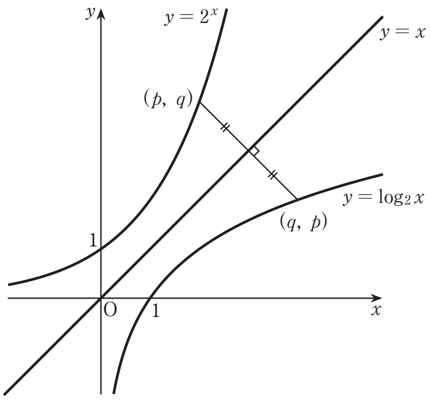
点 $(p,\ q)$ が関数 $y=2^x$ のグラフ上にあるとき

$$q=2^p \quad \text{つまり} \quad p=\log_2 q$$

である。これは，点 $(q,\ p)$ が関数 $y=\log_2 x$ のグラフ上にあることを示している。

逆に，点 $(q,\ p)$ が $y=\log_2 x$ のグラフ上にあれば，点 $(p,\ q)$ は関数 $y=2^x$ のグラフ上にある。

点 $(p,\ q)$ と点 $(q,\ p)$ は，直線 $y=x$ に関して対称であるから，$y=2^x$ のグラフと $y=\log_2 x$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である。



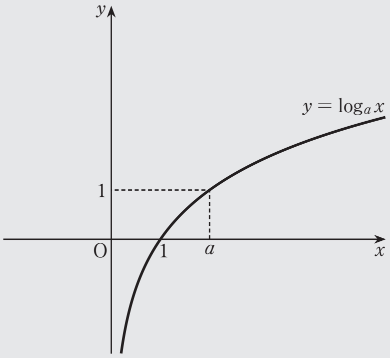
一般に，底がともに a である指数関数 $y=a^x$ のグラフと対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である。

1 関数 $y = \log_3 x$ のグラフと関数 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフを，同じ座標平面上にかけ。

Point Pickup

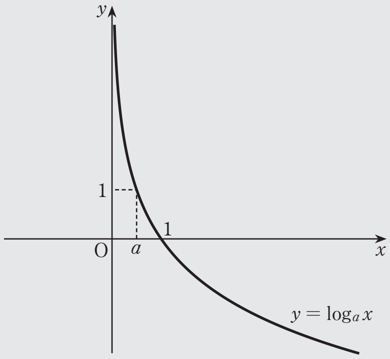
対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ

$a > 1$ のとき



右上がりの曲線

$0 < a < 1$ のとき



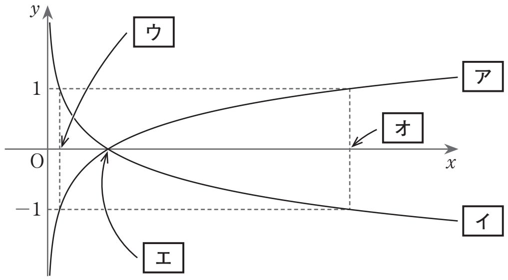
右下がりの曲線

ともに，y 軸を漸近線としてもち，点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る。

第 15 講 PART1 確認問題

1 関数 $y=\log_5 x$ と $y=\log_{\frac{1}{5}} x$ のグラフをかく。

ア，イ は，それぞれ関数 $y=\log_5 x$ と $y=\log_{\frac{1}{5}} x$ のどちらのグラフか，選べ。また，図中の ウ ～ オ に当てはまる数を求めよ。



[ア ， イ の選択肢]

① $y=\log_5 x$　　② $y=\log_{\frac{1}{5}} x$

[ウ ～ オ の選択肢]

① $\frac{1}{5}$　　② 1　　③ 2　　④ 5　　⑤ 25

PART2 対数関数の性質

要点 ① 対数関数の性質

対数関数 $y=\log_a x$ のグラフから，次のことがいえる。

対数関数の性質

1　定義域は正の数全体，値域は実数全体

2　$a>1$ のとき

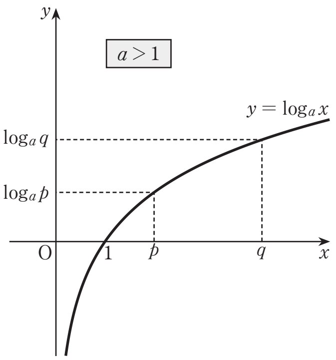
x の値が増加すると y の値も増加する（増加関数である）。

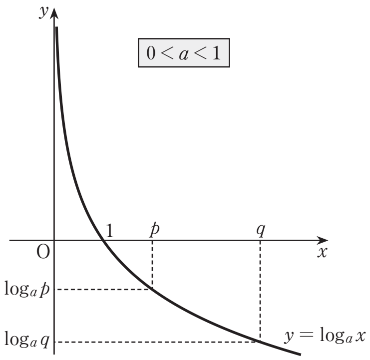
すなわち　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$

$0<a<1$ のとき

x の値が増加すると y の値は減少する（減少関数である）。

すなわち　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$





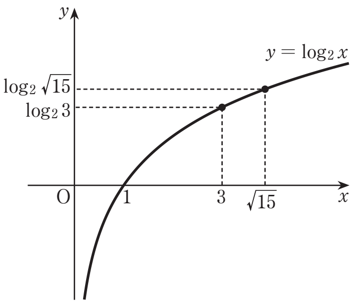
例　$\log_2 3$ と $\log_4 15$ の大小を考える。

$$\log_4 15=\frac{\log_2 \quad}{\log_2 \quad}=\frac{\log_2 15}{2}=\frac{1}{2}\log_2 15=\log_2 15 \quad =\log_2\sqrt{15}$$

真数の大小について　$3<\sqrt{15}$

2 は　　　　　　から　$\log_2 3$　　$\log_2\sqrt{15}$

よって　$\log_2 3<\log_4 15$



[MEMO]

2　次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$2\log_{\frac{1}{2}}3$，0，$\log_{\frac{1}{2}}5$　　　(2)　$\log_3\dfrac{1}{2}$，$\log_9 4$，1

Point Pickup

対数で表された数の大小

対数で表された数の大小比較は，「底」をそろえた上で，対数の性質

$a>1$ のとき　　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$

$0<a<1$ のとき　　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

を利用して比較する。

第 15 講　PART2 確認問題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

1　$\log_{\frac{1}{3}}15$，0，$2\log_{\frac{1}{3}}5$

ア

① $0 < \log_{\frac{1}{3}}15 < 2\log_{\frac{1}{3}}5$

② $0 < 2\log_{\frac{1}{3}}5 < \log_{\frac{1}{3}}15$

③ $\log_{\frac{1}{3}}15 < 2\log_{\frac{1}{3}}5 < 0$

④ $2\log_{\frac{1}{3}}5 < \log_{\frac{1}{3}}15 < 0$

2　1，$\log_2 6$，$\log_4 9$

イ

① $1 < \log_2 6 < \log_4 9$

② $1 < \log_4 9 < \log_2 6$

③ $\log_2 6 < 1 < \log_4 9$

④ $\log_4 9 < \log_2 6 < 1$

PART3 対数関数を含む方程式・不等式

要点 ① 対数関数を含む方程式

対数の定義を用いて，対数関数を含む方程式を解く。

例 方程式 $\log_2 x = 3$ を解く。

真数は　　であるから　x　　…… ①

このとき，対数の定義から　$x =$

これは①を満たすから　$x = 8$

また，a を 1 でない正の定数，すなわち $a > 0$，$a \neq 1$ とするとき，以下のことがいえる。

対数の相等

$p > 0$，$q > 0$ のとき

$$p = q \iff \log_a p = \log_a q$$

このことを利用して，対数関数を含む方程式を解く。

例 方程式 $\log_2 x = 3$ を解く。

真数は正であるから $x > 0$ …… ①

このとき，方程式を変形すると $\log_2 x =$　　　　すなわち $\log_2 x =$

よって　$x = 8$

これは①を満たすから　$x = 8$

このように，対数関数を含む方程式は，底をそろえ，$\log_a p = \log_a q$ の形を導くことで解くことができる。

要点 ② 対数関数を含む不等式

対数関数の大小に関する性質

$a > 1$ のとき	$0 < p < q$	$\iff$	$\log_a p < \log_a q$
$0 < a < 1$ のとき	$0 < p < q$	$\iff$	$\log_a p > \log_a q$

を利用して，対数関数を含む不等式を解く。

例 不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$ を解く。

真数は　　であるから x　　　…… ①

このとき，不等式を変形すると $\log_{\frac{1}{2}} x >$　　　　　すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x >$

底 $\dfrac{1}{2}$ は　　　　　　　　　　　　　　x　$\dfrac{1}{4}$　…… ②

①，②より

3 (1) 次の方程式を解け。

(i) $\log_3 x = 4$　　(ii) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $\log_4 x \leqq 3$　　(ii) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 2$

Point Pickup

対数関数を含む方程式

対数の定義　$\log_a x = b \iff x = a^b$ を用いる。

または，「底」をそろえて，対数の性質

$a > 0$，$a \neq 1$ のとき　$p = q \iff \log_a p = \log_a q$　（p，q は正）

を利用する。真数が正であることに注意。

対数関数を含む不等式

「底」をそろえて，対数関数の大小に関する性質

$a > 1$ のとき　$0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q$

$0 < a < 1$ のとき　$0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q$

を利用する。真数が正であることに注意。

第15講 PART3 確認問題

次の方程式を解け。

1 $\log_4 x = 3$

$x = $ **アイ**

2 $\log_{\frac{1}{3}}(x-6) = -2$

$x = $ **ウエ**

次の不等式を解け。

3 $\log_5 x > 2$

オ

① $0 < x < 10$　② $x > 10$

③ $0 < x < 25$　④ $x > 25$

4 $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqq 3$

カ

① $-2 < x \leqq -\frac{1}{8}$　② $x \geqq -\frac{1}{8}$

③ $-2 < x \leqq -\frac{15}{8}$　④ $x \geqq -\frac{15}{8}$

PART4　常用対数

要点 ①　常用対数

　ある数 x の「　を底とする対数」$\log\ \ x$ を「　　　　」という。

いくつかの x の値に対する常用対数の値を，以下の表に表す。

x	$\cdots$	10000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\cdots$
$\log_{10} x$	$\cdots$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	$\cdots$

また，$x=2$ のとき　$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$

　　$x=3$ のとき　$\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$ である。

ここで，2 の常用対数の値を $\log_{10} 2 = 0.3010$ とすると

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 2 = 2\times \qquad = 0.6020$$

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \qquad = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2 = 1 - \qquad = 0.6990$$

となり，4 や 5 の常用対数の値を求めることができる。

　$y = \log_{10} x$ は増加関数であることより

　　x が 1 桁の数　⇔　$1 \leqq x < 10$　⇔　$10\ \ \leqq x < 10\ \ $　⇔　$\ \ \leqq\ \ <\ \ $

　　x が 2 桁の数　⇔　$10 \leqq x < 100$　⇔　$10\ \ \leqq x < 10\ \ $　⇔　$\ \ \leqq\ \ <\ \ $

であることがわかる。

　一般に，以下のことが成り立つ。

整数 N の桁数

N が n 桁の数　$\Longleftrightarrow$　$10^{n-1} \leqq N < 10^n$　$\Longleftrightarrow$　$n-1 \leqq \log_{10} N < n$

例　2^{30} は何桁の整数か調べる。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

　2^{30} の常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{30} = 30\log_{10} 2 = 30\times 0.3010 = 9.03$$

　よって　$\ \ < \log_{10} 2^{30} < \ \ $　より　$10\ \ < 2^{30} < 10\ \ $

　したがって，2^{30} は　　桁の整数である。

[MEMO]

4　(1)　$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき，$\log_{10} 15$ の値を求めよ。

(2)　3^{30} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

Point Pickup

整数 N の桁数

整数 N の桁数を求める手順は以下。

① N の常用対数をとり，$\log_{10} N$ の値を求める。

② $n-1 \leqq \log_{10} N < n$ を満たす整数 n を求める。

③ $10^{n-1} \leqq N < 10^n$ の形で表す。

④ 整数 N は n 桁である。

第 15 講 PART4 確認問題

1 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき，
$\log_{10} 45$ の値を求めよ。

$\log_{10} 45 = 1.$ アイウエ

2 2^{50} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

オカ 桁

第 16 講 微分係数と導関数
PART1 平均の速さ，平均変化率

要点 ① 平均の速さ

ある条件のもとで，物体が落下し始めてから x 秒間に落下する距離を ym とすると，x と y の関係が

$y=5x^2$

となる。このとき，物体は落下し始めてから

1 秒後には　$5\cdot1^2=5$ (m)

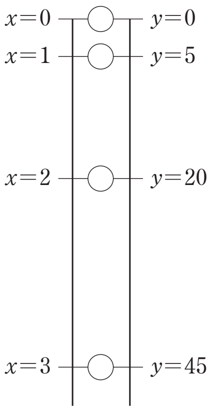
2 秒後には　$5\cdot2^2=20$ (m)

3 秒後には　$5\cdot3^2=45$ (m)

落下する。またこのとき，落下し始めて 2 秒後から 3 秒後までの「平均の速さ」は

$$\text{―――――}=\frac{25}{1}=25\ (\text{m/s})$$

である。



※落下する物体の速さは，時間とともに変化する。上記の例では，2 秒後から 3 秒後までの 1 秒間における平均の速さを求めたが，この 1 秒間という時間を限りなく短くしていくと，その時々における「瞬間の速さ」を求めることができ

2 秒後における瞬間の速さは 20m/s

3 秒後における瞬間の速さは 30m/s

となる。

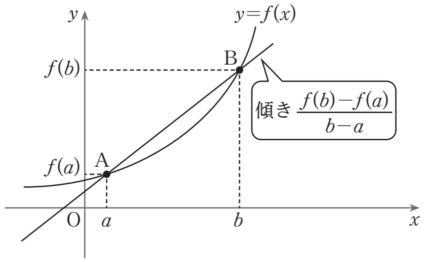
要点 ② 平均変化率

関数 $f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，関数の値は $f(a)$ から $f(b)$ まで変化する。このとき，x の値の変化に対する関数 $f(x)$ の「変化の割合」

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，$x=a$ から $x=b$ までの関数 $f(x)$ の「　　　　　」という。

この平均変化率は，$y=f(x)$ のグラフ上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を通る「　　　　　　」を表している。



例　関数 $f(x)=x^2$ において，x が 1 から 3 まで変化するときの平均変化率は

$$\underline{\qquad\qquad}=\frac{3^2-1^2}{3-1}=\frac{8}{2}=4$$

であり，この値は，2 点 (1, 1)，(3, 9) を通る直線の傾きを表している。

1 関数 $f(x)=-3x^2$ において，x の値が次のように変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ。

(1) -1 から 2 まで　　(2) 1 から $1+h$ まで　$(h \neq 0)$

Point Pickup

平均変化率

関数 $f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

この平均変化率は，2 点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ を通る直線の傾きを表している。

第 16 講　PART1 確認問題

1 関数 $f(x)=2x^2$ において，x の値が 1 から 4 まで変化するときの平均変化率は [アイ] である。

2 関数 $f(x)=2x^2$ において，x の値が 1 から $1+h$ $(h \neq 0)$ まで変化するときの平均変化率は [ウ] $h+$ [エ] である。

PART2 極限値と微分係数

要点 ① 極限値

関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，限りなく a に近づくとき，$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づく場合，この値 α を，x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の「　　　」といい，次のように表す。

$f(x)$　α　　または　　x　　a のとき $f(x)$　　α

例　$\lim_{x \to 2}(x+1)=$

要点 ② 微分係数

関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ …… ①　において，a の値を「固定」し，b を a に限りなく近づけるとき，①がある一定の値に限りなく近づくならば，その極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における「　　　　」(または変化率)といい，「　　　」で表す。

つまり

$$f'(a)=\lim_{b \to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \cdots\cdots ②$$

である。

②において，$b-a=h$ とおくと，$b=a+h$ となる。また，$b \to a$ のとき，$h \to 0$ である。

したがって，微分係数②は次のように表される。

微分係数

$$f'(a)=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

例　関数 $f(x)=x^2$ の $x=1$ における微分係数は

$$f'(\ \ )=\lim_{h \to 0}\frac{f(\ \ +h)-f(\ \ )}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{2h+h^2}{h}$$

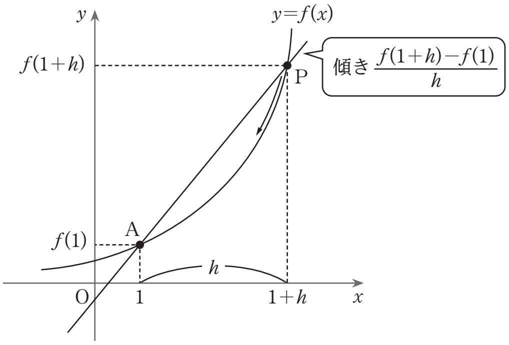
$$=\lim_{h \to 0}\frac{h(2+h)}{h}=\lim_{h \to 0}(2+h)=$$

要点 ③ 微分係数の図形的な意味

関数 $y=f(x)$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$，$\mathrm{P}(1+h,\ f(1+h))$ をとると，直線 AP の傾き

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

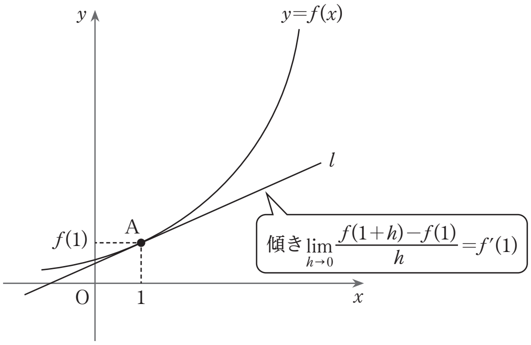
は，関数 $f(x)$ において x が 1 から $1+h$ まで変化するときの平均変化率に等しい。



ここで，h を 0 に限りなく近づけると，点 P は点 A に限りなく近づく。このとき，直線 AP の傾きは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

すなわち，微分係数 $f'(1)$ に限りなく近づき，直線 AP は，点 A を通り傾きが $f'(1)$ の直線 l に限りなく近づく。この直線 l を，曲線 $y=f(x)$ 上の点 A における「　　」といい，点 A を「　　」という。



曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きについて，次のことが成り立つ。

接線の傾きと微分係数

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$ で表される。

2 (1) 次の極限値を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(4+x)$　　(ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{h^2-5h}{h}$

(2) 関数 $f(x)=-2x^2$ の $x=-1$ における微分係数を求めよ。

(3) 曲線 $y=x^2+1$ 上の点 $(2,\ 5)$ における接線の傾きを求めよ。

Point Pickup

極限値

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ は，$f(x)$ を $x=a$ が代入できる形に変形し，$x=a$ を代入して求める。

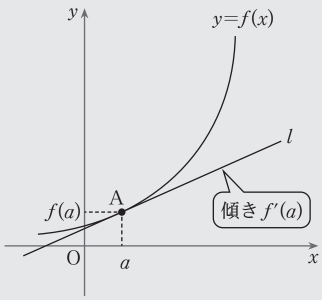
求めた極限値は，$f(x)$ が「限りなく近づく値」である。

微分係数と接線の傾き

微分係数 $\displaystyle f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は，

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ に

おける接線 l の傾きに等しい。



第16講　PART2 確認問題

1　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}(2x+5)=\boxed{\text{ア}}$$

2　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h}{h}=\boxed{\text{イ}}$$

3　関数 $f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

4　曲線 $y=3x^2-1$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線の傾きは

$\boxed{\text{エ}}$ である。

PART3 導関数

要点① 導関数

関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{\qquad}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\qquad=\qquad$$

$f'(a)=2a$ において，a の値を 1 つ決めると，それに対応して微分係数 $f'(a)$ の値がただ 1 つ定まる。例えば $f'(3)=$　　$=6$ である。よって，微分係数 $f'(a)$ は a の「　　」といえる。

$f'(a)=2a$ において，a を x におき換えると，x の関数 $f'(x)=2x$ が得られる。このように，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ において，a を x におき換えることで得られる関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の「　　　」という。

導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

※導関数 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ の式において，x の変化量 h を「x の　　」といい，Δx（デルタエックス）と表す。また，このときの y の変化量 $f(x+h)-f(x)$ を「y の　　」といい，Δy（デルタワイ）と表す。Δx，Δy を用いると，$f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\quad}{\quad}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\qquad)-f(x)}{\qquad}$$

と表される。

関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を「　　　　　　」，または単に「　　　」という。

関数 $y=f(x)$ の導関数を表す記号として，$f'(x)$ のほかに y'，$\frac{dy}{dx}$（ディーワイ・ディーエックス）や，$\frac{d}{dx}f(x)$（ディー・ディーエックス・エフエックス）などが用いられる。

【MEMO】

3 導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x$ (2) $f(x)=x^2$

(3) $f(x)=x^3$ (4) $f(x)=4$

Point Pickup

導関数の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

第16講　PART3 確認問題

導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

1　$f(x)=3x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{ア}}h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\boxed{\text{ア}}$$

$$=\boxed{\text{イ}}$$

2　$f(x)=4x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{ウ}}xh+\boxed{\text{エ}}h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\boxed{\text{ウ}}x+\boxed{\text{エ}}h\right)$$

$$=\boxed{\text{オ}}x$$

3 $f(x)=2x^3$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{カ}x^2h+\boxed{キ}xh^2+\boxed{ク}h^3}{h}$$

$$=\boxed{ケ}$$

[$\boxed{ケ}$ の選択肢]

① x^2　② $2x^2$　③ $6x^2$　④ $6x^3$

4 $f(x)=-2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\boxed{コ}$$

① 0　② 1　③ -2　④ $-2x$

[MEMO]

PART4 導関数の計算

要点① 関数 x^n と定数関数の導関数

関数 $y=x^2$ の導関数を　x^2　と表す。この記号を用いると，関数 x，x^2，x^3 を微分した結果をそれぞれ

$$(x)'=1\,,\qquad (x^2)'=2x\,,\qquad (x^3)'=3x^2$$

と表すことができる。また，c を定数とするとき，$y=c$（定数関数）を微分した結果を

$$(c)'=0$$

と表すことができる。

一般に，次の公式が成り立つ。

関数 x^n と定数関数の導関数の公式

n を正の整数，c を定数とするとき

$$(x^n)'=nx^{n-1}\qquad\qquad (c)'=0$$

例　$(x^4)'$

要点② 導関数の性質

関数 $y=4x^2$ を微分すると

$$y'=(4x^2)'=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-\quad x^2}{h}=\lim_{h\to0}\quad\cdot\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\quad\cdot\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to0}\quad\cdot\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to0}\quad(2x+h)=\quad\cdot 2x$$

$(x^2)'=2x$ より，$(4x^2)'=4(x^2)'$

関数 $y=x^3+x^2$ を微分すると

$$y'=(x^3+x^2)'=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^3+(x+h)^2\}-(x^3+x^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}+\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\{(3x^2+3xh+h^2)+(2x+h)\}=3x^2+2x$$

$(x^3)' = 3x^2$，$(x^2)' = 2x$ より，$(x^3 + x^2)' = (x^3)' + (x^2)'$

一般に，次の性質が成り立つ。

導関数の性質

1　k が定数で，$y = kf(x)$ のとき　　$y' = kf'(x)$

2　$y = f(x) + g(x)$ のとき　　$y' = f'(x) + g'(x)$

3　$y = f(x) - g(x)$ のとき　　$y' = f'(x) - g'(x)$

例　関数 $y = 2x^2 - 3x - 4$ を微分すると

$$y' = (2x^2 - 3x - 4)' = 2(x^2)' - 3(x)' - (4)' = 2\cdot \quad - 3\cdot \quad - \quad = 4x - 3$$

[MEMO]

4 関数 $f(x)=x^3-4x^2-3x+2$ を微分せよ。

また，$x=1$，$x=t$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

Point Pickup

公式・性質を用いた関数の微分

n を正の整数，c を定数とするとき

$(x^n)'=nx^{n-1}$　　特に　$(x)'=1$，$(x^2)'=2x$，$(x^3)'=3x^2$

$(c)'=0$

k，l を定数とするとき

$\{kf(x)\}'=kf'(x)$

$\{kf(x)\pm lg(x)\}'=kf'(x)\pm lg'(x)$　（複号同順）

微分係数の求め方

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を求める手順は以下。

① $f(x)$ を微分し，導関数 $f'(x)$ を求める。

② $f'(x)$ に $x=a$ を代入する。

第 16 講　PART4 確認問題

1 関数 $f(x)=3x^2-4x+2$ を微分すると

$f'(x)=$ [ア] $x-$ [イ]

また，$x=2$ における微分係数は

$f'(2)=$ [ウ]

2 関数 $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$ の，$x=t$ における微分係数は

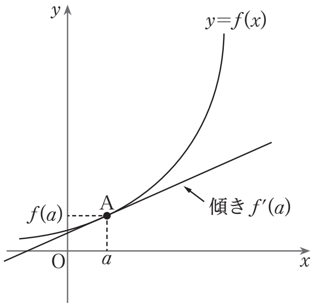
$f'(t)=$ [エ] t^2- [オ] $t+$ [カ]

【MEMO】

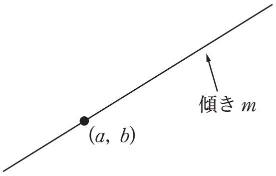
第 17 講　導関数の応用
PART1　接線の方程式

要点 ①　接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ で表される。$f'(a)$ は，$f(x)$ を微分して得られる導関数 $f'(x)$ に $x=a$ を代入して求めることができる。



また，点 $(a,\ b)$ を通り，傾き m の直線の方程式は，$y-b=m(x-a)$，つまり　$y=m(x-a)+b$　と表される。



よって，次のことが成り立つ。

接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

例　関数 $y=x^2+1$ のグラフ上の点 $(2,\ 5)$ における接線の方程式を求める。

$f(x)=x^2+1$ とおくと

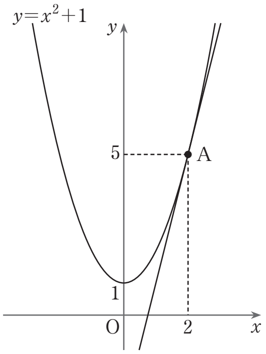
$f'(x)=$

よって，点 $(2,\ 5)$ における接線の傾きは

$f'(\quad)=2\cdot 2=4$

したがって，点 $(2,\ 5)$ における接線の方程式は

$y=\quad(x-\quad)+\quad$　すなわち　$y=4x-3$



[MEMO]

1 (1) 関数 $y=x^2-2x$ のグラフ上の点 $(-1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 $y=-x^2+5x-6$ 上に x 座標が 1 である点 A をとる。点 A における接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

第 17 講　PART1 確認問題

1　関数 $y=x^2-x+3$ のグラフ上の点 $(2,\ 5)$ における接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{ア}}x-\boxed{\text{イ}}$$

である。

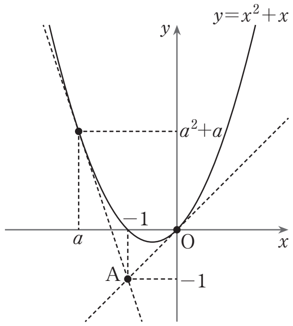
2　曲線 $y=-2x^2+3x-1$ 上に x 座標が 2 である点 A をとる。点 A における接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{ウエ}}x+\boxed{\text{オ}}$$

である。

PART2 曲線上にない点から引いた接線

要点 ① 曲線上にない点から引いた接線の方程式



曲線 $y=x^2+x$ に，点 A$(-1,\ -1)$ から引いた接線の方程式を求める。

$f(x)=x^2+x$ とおくと，$f'(x)=$　　　　である。

接点の座標を $($　,　　　$)$ とおくと，接線の傾きは

$f'($　$)=$

である。よって，点 $(a,\ a^2+a)$ における接線の方程式は

$y=$　　　　$(x-$　$)+$

$y=(2a+1)x+(2a+1)\cdot(-a)+a^2+a$

すなわち

$y=(2a+1)x-a^2$ …… ①

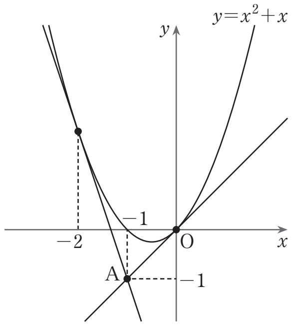
この直線が，　　　　　　　　　　　　ので

$=(2a+1)\cdot$　　　$-a^2$

$a^2+2a=0$

$a(a+2)=0$

よって　$a=0,\ -2$



この a が接点の x 座標であり，①に代入することで，接線の方程式を求めることができる。

①より

$a=0$ のとき　$y=$

$a=-2$ のとき　$y=$

したがって，求める接線の方程式は

$y=x,\ y=-3x-4$

2 曲線 $y=-x^2-2x-3$ に，点 A(0, 1) から引いた接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

曲線上にない点から引いた接線の方程式

グラフ上にない点 A について

・点 A からその曲線に引いた接線の方程式

・曲線の接線の方程式のうち，点 A を通るもの

を求めるときには，接点の x 座標を「a」などの文字でおき，その文字を用いて接線の方程式を表し，接線が点 A を通るときの a を求め，接線の方程式を導く。

第 17 講　PART2 確認問題

1　曲線 $y=x^2-3x+5$ に，点 A$(2,\ -1)$ から引いた接線の方程式を求める。

曲線 $y=x^2-3x+5$ 上の点 $(a,\ a^2-3a+5)$ における接線の方程式は

$$y=(\boxed{ア}a-3)x-a^2+\boxed{イ}$$

この直線が点 A$(2,\ -1)$ を通るので，$a=\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$

(ただし，$\boxed{ウ}<\boxed{エ}$ とする)

よって，求める接線の方程式は

$$y=-\boxed{オ}x+\boxed{カ},\quad y=\boxed{キ}x-\boxed{クケ}$$

[MEMO]

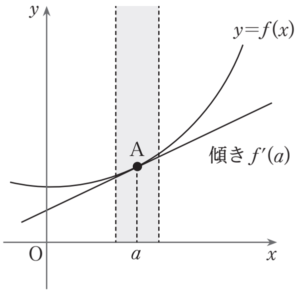
PART3 関数の増減

要点 ① 関数の増減

「区間」…… $1 \leqq x < 2$，$3 < x$ のような，不等式を満たす実数 x 全体の集合

ある区間における関数の増加・減少を，導関数を用いて調べる。

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の１点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ に近いところでは，関数のグラフは点 A における接線とほとんど一致している，と考えることができる。



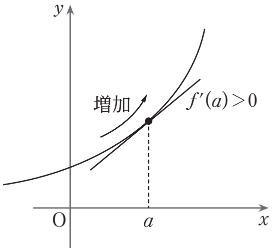
点 A における接線の傾きは，「　　　　　　　」であるから

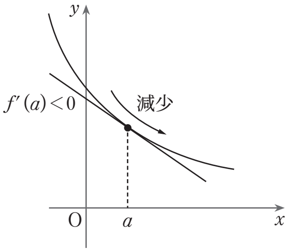
$f'(a)$　　のとき，接線は「　　　　　」であり，$x=a$ の付近で $f(x)$ は「　　」

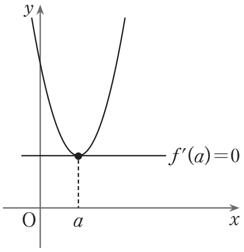
$f'(a)$　　のとき，接線は「　　　　　」であり，$x=a$ の付近で $f(x)$ は「　　」

$f'(a)$　　のとき，接線は「　　　　　」であり，$x=a$ の付近で $f(x)$ は「　　」

であることがわかる。







したがって，関数 $y=f(x)$ のある区間における増加・減少は，その導関数 $f'(x)$ の符号を用いて調べることができる。

関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号

ある区間で

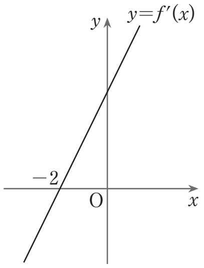
常に $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で増加する。

常に $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で減少する。

常に $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ はその区間で定数である（増加も減少もしない）。

例　関数 $f(x)=x^2+4x$ の増減を調べる。

$f'(x)=2x+4$



$f'(x)$　　　とすると，$2x+4=0$ より $x=-2$

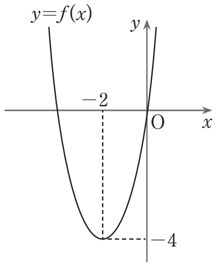
$y=f'(x)$ のグラフは右図より

x　-2 のとき　$f'(x)>0$

x　-2 のとき　$f'(x)<0$

よって，$f'(x)$ の符号および $f(x)$ の増減は，次のような表で表される。

x	……	-2	……
$f'(x)$			
$f(x)$			



したがって，$f(x)$ は

$x \geqq -2$ で増加，$x \leqq -2$ で減少

関数の増減を表す上記のような表を「　　　　」という。表の中の記号「　」はその区間で関数の値が増加することを表し，「　」はその区間で関数の値が減少することを表す。

※関数が増加または減少する区間には，$f'(x)=0$ となる実数 x の値も含まれる。

3　次の関数の増減を調べ，増減表を作成せよ。

(1)　$f(x)=x^3-3x^2$　　(2)　$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x+2$

Point Pickup

関数の増減

関数 $f(x)$ の増減を調べ，増減表を作成する手順は以下。

①　導関数 $f'(x)$ を求める。

②　$f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。

③　②の値，および $y=f'(x)$ のグラフをもとに，$f'(x)>0$，$f'(x)<0$ となる x の値の範囲を求める。ある区間で

常に $f'(x)>0$　$\Longrightarrow$　$f(x)$ はその区間で増加する

常に $f'(x)<0$　$\Longrightarrow$　$f(x)$ はその区間で減少する

常に $f'(x)=0$　$\Longrightarrow$　$f(x)$ はその区間で定数である(増加も減少もしない)

④　増減表には，$f'(x)=0$ となる実数 x の値，$f'(x)$ の符号および値 (0)，$f(x)$ の増減 (↗，↘) および値を記入する。

第17講 PART3 確認問題

次の関数の増減を調べ，増減表を作成せよ。

1 $f(x)=2x^3-3x^2+2$

x	…	ア	…	イ	…
$f'(x)$	ウ	0	エ	0	オ
$f(x)$	カ	2	キ	1	ク

[ウ ～ ク の選択肢]

① ＋　　② －

③ ↗　　④ ↘

2 $f(x)=-x^3+6x^2-9x$

x	…	ケ	…	コ	…
$f'(x)$	サ	0	シ	0	ス
$f(x)$	セ	-4	ソ	0	タ

[サ ～ タ の選択肢]

① ＋　　② －

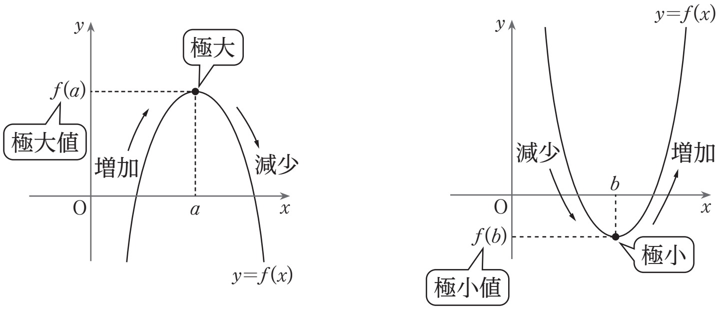
③ ↗　　④ ↘

PART4 関数の極大・極小

要点 ① 関数の極大・極小

関数 $f(x)$ の値が，$x=a$ を境目として増加から減少に転じるとき，$f(x)$ は $x=a$ で「　　」であるといい，$f(a)$ を「　　　」という。

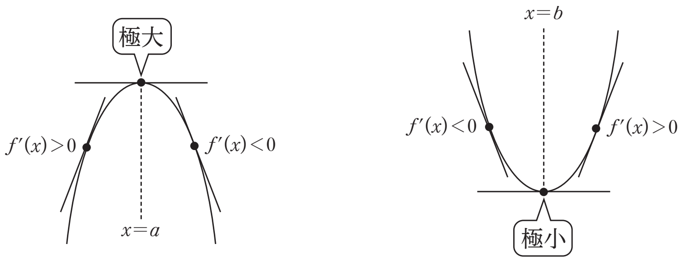
また, 関数 $f(x)$ の値が, $x=b$ を境目として減少から増加に転じるとき, $f(x)$ は $x=b$ で「　　」であるといい，$f(b)$ を「　　　」という。



極大値と極小値をあわせて「　　」という。

関数 $f(x)$ の値の増減は，$f'(x)$ の符号で考えることができる。

$f'(x)$ の符号が $x=a$ を境に「　」から「　」に転じるとき，$f(x)$ は $x=a$ を境目として増加から減少に転じる。また，$f'(x)$ の符号が $x=b$ を境に「　」から「　」に転じるとき，$f(x)$ は $x=b$ を境目として減少から増加に転じる。



関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるときは，$x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が入れ替わるから，$f'(a)$ 　　である。よって，以下のことがいえる。

関数の極大・極小

$f'(a)=0$ となる $x=a$ の前後で

$f'(x)$ の符号が正から負に転じるならば，$f(a)$ は極大値

$f'(x)$ の符号が負から正に転じるならば，$f(a)$ は極小値

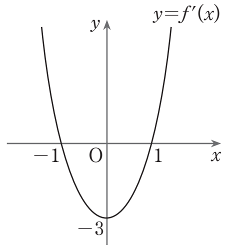
例　関数 $f(x)=x^3-3x+2$ の増減を調べ，極値を求め，グラフをかく。

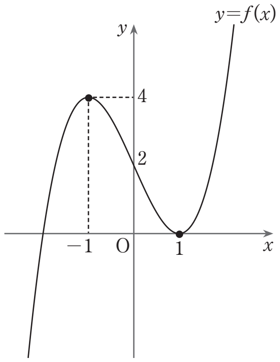
$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると $x=-1,\ 1$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗





したがって

$x=$　　　で極大値

$x=$　　で極小値

をとる。$y=f(x)$ のグラフは右図。

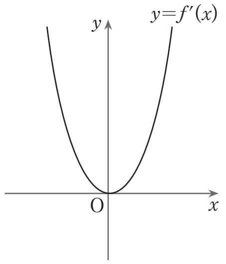
例　関数 $f(x)=x^3$ について

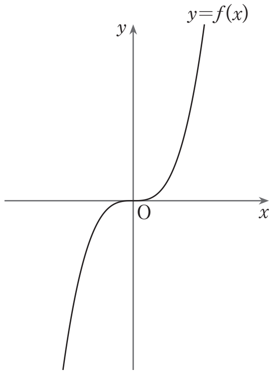
$$f'(x)=3x^2$$

$f'(x)=0$ とすると $x=0$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗





したがって，$f(x)$ は常に増加し，極値をもたない。

$y=f(x)$ のグラフは右図。

以上より，次のことがいえる。

$f'(a)=0$ であっても，$f(a)$ が極値になるとは限らない。

4 次の関数の増減を調べ，極値を求め，そのグラフをかけ。

(1) $f(x)=3x^3-9x^2+6$ (2) $f(x)=-x^3+3x^2-3x+2$

Point Pickup

関数の極値とグラフ

関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求め，グラフをかく手順は以下。

① 導関数 $f'(x)$ を求める。

② $f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。この x の値が極値をとる x の候補。

③ ②で求めた x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，増減表をかく。

④ ②で求めた x の値の前後で

$f'(x)$ の符号が正から負に転じるならば，$f(x)$ はその x において極大値をとる。

$f'(x)$ の符号が負から正に転じるならば，$f(x)$ はその x において極小値をとる。

$f'(x)$ の符号に変化がなければ，$f(x)$ はその x において極値をとらない。

⑤ ③の増減表をもとにグラフをかく。

②の x の値におけるグラフの接線が x 軸と平行となることに注意。

第 17 講　PART4 確認問題

1　関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ について

$f'(x)=0$ となる x の値は

　　ア

これより，極値を求めると

　　極大値は イ ，極小値は ウ

$y=f(x)$ のグラフは エ である。

[ア の選択肢]

①　$x=-1$，3　　②　$x=-3$，1

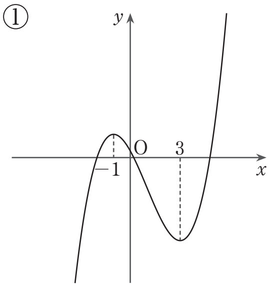
③　$x=-1$ の 1 つ　　④　$x=3$ の 1 つ　　⑤　ない

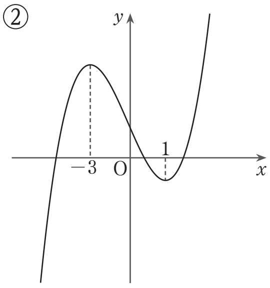
[イ ， ウ の選択肢]

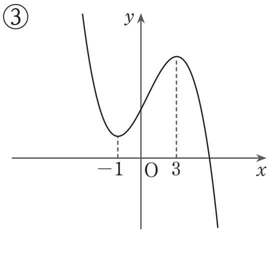
①　-25　　②　-20　　③　7

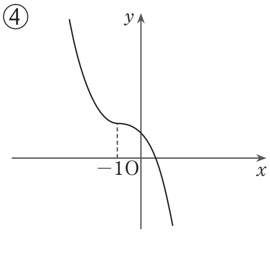
④　13　　⑤　83　　⑥　ない

[エ の選択肢]

①


②


③


④


2 関数 $f(x)=x^3+6x^2+12x-18$ について

$f'(x)=0$ となる x の値は

　　オ

これより，極値を求めると

　　極大値は **カ** ，極小値は **キ**

$y=f(x)$ のグラフは **ク** である。

[**オ** の選択肢]

① $x=-2,\ 2$　　② $x=-2$ の 1 つ

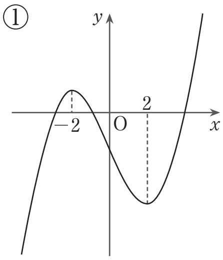
③ $x=0$ の 1 つ　　④ $x=2$ の 1 つ　　⑤ ない

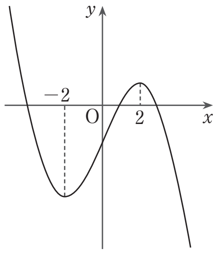
[**カ** ， **キ** の選択肢]

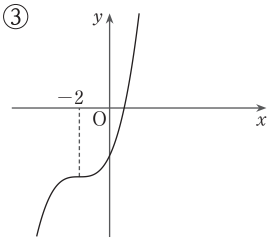
① -26　　② -10　　③ -2

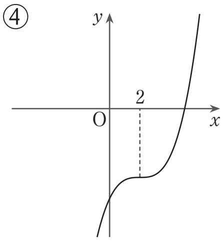
④ 26　　⑤ 38　　⑥ ない

[**ク** の選択肢]

①


②


③


④


【MEMO】

PART5 関数の最大・最小

要点 ① 関数の最大・最小

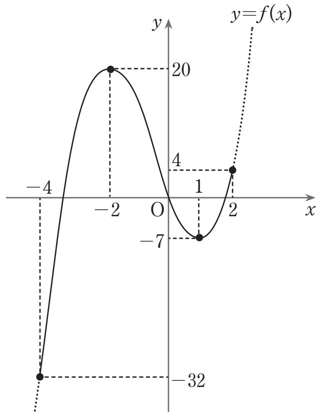
関数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ の区間 $-4\leqq x\leqq 2$ における最大値，最小値を求める。

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6\left(x^2+x-2\right)=6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$ となるのは $x=-2$，1 のとき

よって，区間 $-4\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は以下。

x		$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$	



したがって，$f(x)$ は

$x=$　　で最大値

$x=$　　で最小値

をとる。

関数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ において，極大値 20 は最大値であるが，極小値 -7 は最小値ではない。

一般に，区間 $a\leqq x\leqq b$ で定義された関数の最大値，最小値は，この区間内の極値と，区間の両端における関数の値を比較して求める。

【MEMO】

5 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x+1 \quad \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 5\right)$

(2) $f(x)=-2x^3-6x^2+4 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

Point Pickup

関数の最大・最小

関数 $f(x)$ の，ある区間における最大値，最小値を求める手順は以下。

① 導関数 $f'(x)$ を求める。

② $f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。この x の値が極値をとる x の候補。

③ ②で求めた x の値が区間内であれば，その値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，増減表をかく。

④ 区間内の極値と，区間の端における関数の値を増減表に記入し，最大値，最小値を求める。

第17講　PART5 確認問題

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

1　$f(x)=-x^3+12x-7\quad(-3\leqq x\leqq 5)$

$x=$ ア のとき，最大値 イ

$x=$ ウ のとき，最小値 $-$ エオ

2　$f(x)=x^3-3x^2+5\quad(1\leqq x\leqq 3)$

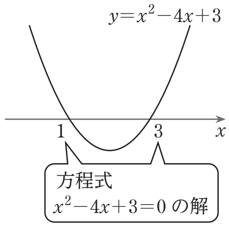
$x=$ カ のとき，最大値 キ

$x=$ ク のとき，最小値 ケ

PART6 方程式への応用

要点① 3 次方程式の実数解の個数

方程式 $f(x)=0$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標である。例えば，2 次方程式 $x^2-4x+3=0$ の実数解は，2 次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標で，$x=1$，3 である。



方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数であり，その個数は，$y=f(x)$ の増減を調べ，グラフをかくことで求めることができる。

例　3 次方程式 $x^3-3x-1=0$ の異なる実数解の個数を求める。

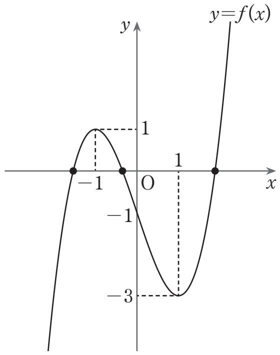
$f(x)=x^3-3x-1$ とおく。

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると $x=-1$，1

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は　個である。

ゆえに，方程式 $x^3-3x-1=0$ の異なる実数解の個数は　個である。

[MEMO]

6 次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $x^3-12x+12=0$

(2) $x^3+3x^2-4=0$

(3) $x^3+3x^2+3x+2=0$

Point Pickup

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数 $\Longleftrightarrow$ 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，グラフをかいて求めることができる。

第 17 講　PART6 確認問題

1　$f(x)=x^3-3x+1$ の極大値は [ア]，極小値は [イ]

よって，3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ の異なる実数解の個数は [ウ] 個

[[ア], [イ] の選択肢]

① -3　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 3　⑥ なし

2　$f(x)=2x^3-3x^2+1$ の極大値は [エ]，極小値は [オ]

よって，3 次方程式 $2x^3-3x^2+1=0$ の異なる実数解の個数は [カ] 個

[[エ], [オ] の選択肢]

① -3　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 3　⑥ なし

3　$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ の極大値は [キ]，極小値は [ク]

よって，3 次方程式 $x^3-3x^2+3x+1=0$ の異なる実数解の個数は [ケ] 個

[[キ], [ク] の選択肢]

① -2　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2　⑥ なし

第 18 講　不定積分，定積分

PART1 不定積分

要点① 不定積分

関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ となる関数を，関数 $f(x)$ の「　　　　」(または「原始関数」)という。

例　$(x^3)'=$　　，$(x^3+1)'=$　　，$(x^3-2)'=$　　より

x^3，x^3+1，x^3-2 は，いずれも　　の不定積分である。

$f(x)$ の不定積分は無数にあり，その違いは「　　　　」だけである。例えば，$3x^2$ の不定積分は x^3　　(　は定数)と表すことができる。

関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると，任意の不定積分は

$F(x)$　　(　は定数)

とまとめて表すことができ，これを記号「　　　　」(インテグラル・エフエックス・ディーエックス)と表す。

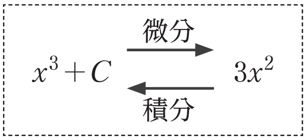
不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\int f(x)dx=F(x)+C \quad (C\text{ は定数})$$

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を「　　　　」といい，上記の定数 C を「　　　　」という。

以降は特に断りのない限り，C は積分定数を表すものとする。



例　$(x^3+C)'=3x^2$　より　$\int 3x^2\,dx=x^3+C$

[MEMO]

1 x^2 を微分すると $\left(x^2\right)' = 2x$ である。この式の両辺を 2 で割ることにより

$$\frac{1}{2}(x^2)' = x \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$$

であることがわかる。したがって

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

と表すことができる。

同様に，x^3，x をそれぞれ微分した結果を用いて，次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int 1 dx$

Point Pickup

不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

微分すると $f(x)$ になる関数の 1 つを $F(x)$ とすると，$F(x)$ と定数部分が異なる関数 $F(x)+C$ は，C に関わらず微分すると $f(x)$ となる。

$F(x)+C$ をまとめて $\displaystyle\int f(x)dx$ と表す。

第18講 PART1 確認問題

1 $(x^4)' = $ ア であるから，$\left(\boxed{イ} \right)' = x^3$ である。したがって

$$\int x^3\,dx = \boxed{ウ} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

① $3x^2$　② $4x^3$

③ $3x^4$　④ $\frac{1}{4}x^4$

2 $(x)' = $ エ であるから，$\left(\boxed{オ} \right)' = 2$ である。したがって

$$\int 2\,dx = \boxed{カ} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

① 1　② 2

③ $2x$　④ $\frac{1}{2}x$

PART2 x^n の不定積分，不定積分の性質

要点 ① x^n の不定積分

$(x)'=\quad$ ，$\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=\quad$ ，$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=\quad$ であるから

$$\int 1dx=\qquad ,\ \int xdx=\qquad ,\ \int x^2\,dx=$$

である。

一般に，n が 0 または正の整数のとき

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=$$

であるから，次の公式が成り立つ。

x^n の不定積分

n が 0 または正の整数のとき

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

例 $\int x^4\,dx=\qquad x\qquad +C=\quad x\quad +C$

要点 ② 不定積分の性質

一般に，不定積分について，次の性質が成り立つ。

不定積分の性質

1 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx\quad (k\text{ は定数})$

2 $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

3 $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

また，$\int 1dx$ は $\int dx$ と書くことができる。

例 $\displaystyle\int(5x^2-4x+3)dx=\int 5x^2dx-\int 4xdx+\int 3dx$

$\displaystyle=5\int x^2dx-4\int xdx+3\int dx$

$=5\cdot\qquad-4\cdot\qquad+3\cdot\quad+\qquad$ ……(※)

$=\dfrac{5}{3}x^3-2x^2+3x+C$

(※)のように，積分定数は 1 つにまとめて書く。

また，変数が x 以外の関数についても，その不定積分を考えることができる。

例 $\displaystyle\int tdt=\qquad+C$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(3x^2-4x+5)dx$　　(2) $\int(4t^2-1)dt$

Point Pickup

不定積分の計算

不定積分の性質

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

$$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

を用いて不定積分を分割し

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$$

を用いて，定数を前に出した上で

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n \text{ は } 0 \text{ または正の整数。} C \text{ は積分定数})$$

を用いて積分する。積分定数は，1 つにまとめて書く。

第 18 講　PART2 確認問題

次の不定積分を求めよ。

1　$\int (6x^2+4x-3)dx$

$=$ ア x^3+ イ x^2- ウ $x+C$　（C は積分定数）

2　$\int (t^2+t+1)dt$

$=\frac{1}{\text{エ}}t^3+\frac{1}{\text{オ}}t^2+t+C$　（C は積分定数）

PART3 定積分

要点 ① 定積分

関数 $f(x)=3x^2$ の不定積分は，$\int 3x^2\,dx=x^3+C$（C は積分定数）と表される。これを $F(x)$ とおくと，$F(x)=x^3+C$ となり，これは x の関数である。

ここで，$F(3)-F(1)$ を計算すると

$$F(3)-F(1)=(3^3+C)-(1^3+C)=26$$

となり，この値は，積分定数 C とは無関係に 1 つに定まる。

一般に，関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とするとき

$$F(b)-F(a)$$

の値を，$f(x)$ の a から b までの「　　　」といい，記号「　　　　　」で表す。a をこの定積分の「　　」，b を「　　」という。

また，関数 $F(x)$ に対し，$F(b)-F(a)$ を記号「　　　　」で表す。

定積分

関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

例 $\int_1^2 x^2\,dx=$　　　　$=$　　　　　　　　$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

定積分の値は，積分定数 C の値に無関係であることより，不定積分の定数項を 0 として計算するとよい。

また，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を求めることを，関数 $f(x)$ を「　　　　　　　　　」という。

[MEMO]

3　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_1^3 (2x+3)\,dx$

(2)　$\displaystyle\int_{-2}^1 (3x^2-18x-21)\,dx$

Point Pickup

定積分

関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

①　関数 $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ のうち，定数項が 0 のものを求める。

②　$F(b)-F(a)$ を計算する。

第 18 講 PART3 確認問題

次の定積分を求めよ。

1 $\displaystyle\int_1^2 (4x-3)\,dx = \boxed{\text{ア}}$

2 $\displaystyle\int_{-1}^3 (3x^2-8x+2)\,dx = \boxed{\text{イ}}$

PART4 定積分の性質

要点 ① 定積分の性質

一般に，定積分について，次の性質が成り立つ。

定積分の性質 I

1 $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　（k は定数）

2 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

上記の定積分の性質は，関数 $f(x)$，$g(x)$ の不定積分の 1 つをそれぞれ $F(x)$，$G(x)$ とおくことで証明することができる。

これらの性質を用いることで，定積分の計算を「項ごと」に行うことができる。

例

$$\begin{aligned}\int_2^4 (x^2-6x+8)dx&=\int_2^4 x^2\,dx-6\int_2^4 xdx+8\int_2^4 dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^4-6\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^4+8\Big[x\Big]_2^4\\&=\frac{1}{3}(4^3-2^3)-\frac{6}{2}(4^2-2^2)+8(4-2)\\&=\frac{56}{3}-36+16\\&=-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

また，積分区間が同じ定積分を 1 つにまとめることができる。

例

$$\begin{aligned}\int_1^2 (2x-5)dx+\int_1^2 (x+4)dx&=\int_1^2 \{(2x-5)+(x+4)\}dx\\&=\int_1^2 (3x-1)dx\end{aligned}$$

要点 ② 定積分の上端と下端に関する性質

一般に，定積分の上端と下端に関して，次の性質が成り立つ。

定積分の性質Ⅱ

4 $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$

5 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

6 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

※性質 **6** は，a，b，c の大小に関わらず成り立つ。

上記の性質は，関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とおくことで証明することができる。

これらの性質を用いることで，積分区間の上端と下端の入れ替えや，積分区間の連結を行うことができる。

例 $\displaystyle\int_2^2 (3x^2+x-2)dx=$

$\displaystyle\int_1^{-3} (5x^2-4x)dx=\int\quad(5x^2-4x)dx$

$\displaystyle\int_{-1}^1 (2x^2+5)dx+\int_1^2 (2x^2+5)dx=\int\quad(2x^2+5)dx$

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^1 (3x^2-5x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^1 (3x^2-x+2)dx-\int_2^1 (3x^2-x+2)dx$

Point Pickup

定積分の性質

1 $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　（k は定数）

2 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

4 $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$

5 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

6 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

性質 **1** ～ **3** を用いることで，定積分の計算を「項ごと」に行うことができ，
性質 **4** ～ **6** を用いることで，積分区間の上端と下端の入れ替えや，積分区間の連結を行うことができる。

第 18 講　PART4 確認問題

次の定積分を求めよ。

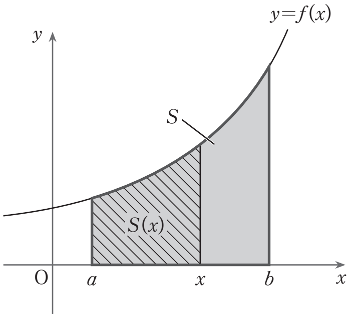
1 $\displaystyle\int_{2}^{2}(x^2+x)dx=$ ア

2 $\displaystyle\int_{-3}^{2}(2x^2+3x-4)dx-\int_{3}^{2}(2x^2+3x-4)dx=$ イウ

第19講　定積分と面積

PART1　定積分と面積

要点①　定積分と面積

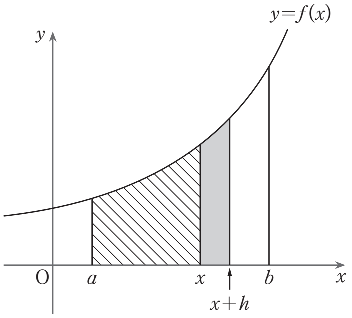


右図のように，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を S とする。

また，区間 $a \leqq x \leqq b$ 内の x に対し，x 座標が a から x までの部分の面積を $S(x)$ とおくと，$S(x)$ は x の関数であり

$$S(a)=\quad,\ S(b)=\quad,\ S=S(\quad)-S(\quad)$$

である。

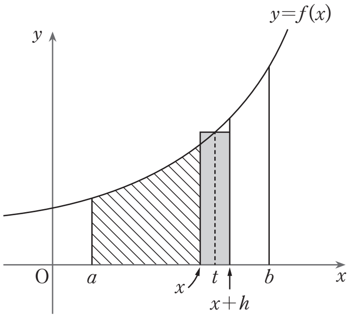


面積 $S(x)$ が，関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つであることを示す。

$h>0$ として，x を h だけ増加させると，面積は

$$S(x+h)-S(x)$$

だけ増加する。



この増加した部分と面積が等しい，横の長さが h，縦の長さが $f(t)$ $(x \leqq t \leqq x+h)$ である長方形をとると

$$S(x+h)-S(x)=$$

すなわち，$\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(t)$　が成り立つ。

この式は $h<0$ のときも成り立つ。

ここで，$h \longrightarrow 0$ のとき，$t \longrightarrow \quad$ であるから，$f(t) \longrightarrow f(\quad)$ となる。したがって

$$\lim_{h \to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x)\quad すなわち\quad S'(x)=f(x)$$

が成り立つ。よって，面積 $S(x)$ は関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つである。

したがって

$$S=S(b)-S(a)=\qquad=$$

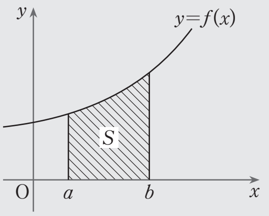
である。

一般に，次のことが成り立つ。

定積分と面積①

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

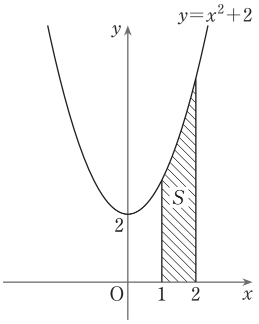


例　放物線 $y=x^2+2$ と x 軸，および 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求める。

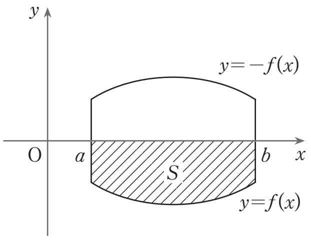
区間 $1 \leqq x \leqq 2$ において，$y>0$ であるから

$S=$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_1^2=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+2\right)=\frac{13}{3}$$



区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は，右図のように，曲線 $y=f(x)$ を x 軸に関して対称に移動した曲線 $y=-f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積に等しい。

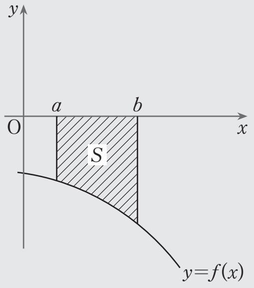


したがって，次のことが成り立つ。

定積分と面積②

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$$



[MEMO]

1 次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2+1$，$x=-1$，$x=2$

(2) $y=-x^2+2x-3$，$x=0$，$x=3$

Point Pickup

曲線と x 軸の間の部分の面積

曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。

① $y=f(x)$ のグラフをかく。

② 区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の上下関係を調べる。

③ ②において

常に $f(x) \geqq 0$ のとき　$S=\int_a^b f(x)dx$

常に $f(x) \leqq 0$ のとき　$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$

第 19 講　PART1 確認問題

次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

1　$y=x^2+3$, $x=-2$, $x=1$

$S=$ [アイ]

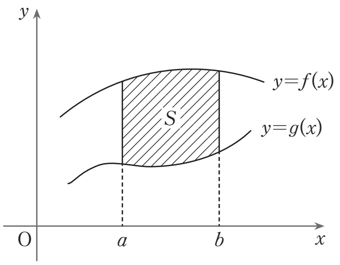
2　$y=-x^2+4x-5$, $x=0$, $x=3$

$S=$ [ウ]

[MEMO]

PART2　2つの曲線の間の面積

要点①　2つの曲線の間の面積

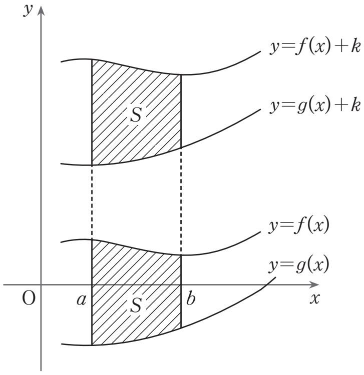


2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S を定積分で表す。

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x) \geqq 0$ のとき，求める面積 S は，$a \leqq x \leqq b$ における曲線 $y=f(x)$ と x 軸の間の面積から，曲線 $y=g(x)$ と x 軸の間の面積を引いたものとして求められるから

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

と表される。



また，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ であるが，$f(x)$ や $g(x)$ がこの区間で負の値をとることがあるときは，2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ を y 軸方向に k だけ平行移動し，$f(x)$，$g(x)$ のグラフがともに，この区間で常に x 軸より上側にあるようにする。このとき

$$S=\int_a^b \{(f(x)+k)-(g(x)+k)\}dx$$

$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

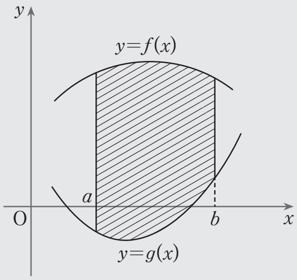
と表される。

よって，次のことが成り立つ。

2つの曲線の間の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



[MEMO]

2 (1) 放物線 $y=x^2-x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 放物線 $y=-x^2+4x+2$ と直線 $y=2x-1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

Point Pickup

2 つの曲線の間の面積

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。

① $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフをかく。

② 方程式 $f(x)=g(x)$ を解き，2 曲線の共有点の x 座標を求める。

③ ②の交点をもとに，積分範囲 $a \leqq x \leqq b$ を定める。

④ 区間 $a \leqq x \leqq b$ において

常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき　$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

常に $f(x) \leqq g(x)$ のとき　$S=\int_a^b \{g(x)-f(x)\}dx$

第19講 PART2 確認問題

次の面積を求めよ。

1 放物線 $y=x^2-2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

2 放物線 $y=x^2+x-1$ と直線 $y=2x+1$ で囲まれた部分の面積

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

テキスト　解答

第 1 講　式と計算

PART1　3 次式の展開と因数分解の公式

1　(1)　次の式を展開せよ。

(i)　$(x+4)^3$　　(ii)　$(3x-2y)^3$

(iii)　$(x+6)(x^2-6x+36)$　　(iv)　$(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　x^3+8　　(ii)　$27a^3-64b^3$

[解答]

(1) (i)　$(x+4)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+4^3=x^3+12x^2+48x+64$

(ii)　$(3x-2y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

(iii)　$(x+6)(x^2-6x+36)=(x+6)(x^2-x\cdot 6+6^2)$

$=x^3+6^3=x^3+216$

(iv)　$(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)=(2a-3b)\{(2a)^2+2a\cdot 3b+(3b)^2\}$

$=(2a)^3-(3b)^3$

$=8a^3-27b^3$

(2) (i)　$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$

$=(x+2)(x^2-2x+4)$

(ii)　$27a^3-64b^3=(3a)^3-(4b)^3$

$=(3a-4b)\{(3a)^2+3a\cdot 4b+(4b)^2\}$

$=(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

PART2 二項定理

2 (1) 二項定理を用いて，$(x+3)^5$ を展開せよ。

(2) $(2x-3y)^6$ の展開式における x^4y^2 の項の係数を求めよ。

[解答]

(1) $(x+3)^5={}_5\mathrm{C}_0x^5+{}_5\mathrm{C}_1x^4\cdot3+{}_5\mathrm{C}_2x^3\cdot3^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2\cdot3^3+{}_5\mathrm{C}_4x\cdot3^4+{}_5\mathrm{C}_5 3^5$

$=x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$

(2) $(2x-3y)^6$ の展開式の一般項は　${}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}(-3y)^r={}_6\mathrm{C}_r\cdot2^{6-r}\cdot(-3)^rx^{6-r}y^r$

x^4y^2 は　$6-r=4$　つまり　$r=2$　のときの項である。

よって，求める係数は　${}_6\mathrm{C}_2\cdot2^4\cdot(-3)^2=15\cdot16\cdot9=2160$

PART3 多項式の除法

3 次の多項式 A を多項式 B で割ったときの商と余りを求めよ。

(1) $A=3x^2+x+2$，$B=x-3$　　(2) $A=x^3+6x^2-5$，$B=x+4$

[解答]

(1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x+10 \\ \hline
x-3 & 3x^2+x+2 \\
 & \underline{3x^2-9x} \\
 & \qquad 10x+2 \\
 & \qquad \underline{10x-30} \\
 & \qquad\qquad 32
\end{array}
$$

商 $3x+10$　　余り 32

(2)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x-8 \\ \hline
x+4 & x^3+6x^2\qquad -5 \\
 & \underline{x^3+4x^2} \\
 & \qquad 2x^2 \\
 & \qquad \underline{2x^2+8x} \\
 & \qquad\qquad -8x-5 \\
 & \qquad\qquad \underline{-8x-32} \\
 & \qquad\qquad\qquad 27
\end{array}
$$

商 x^2+2x-8　　余り 27

PART4 分数式の計算

4 (1) 次の分数式を約分し，既約分数式で表せ。

(i) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$　　(ii) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10}$

(2) 次の式を計算せよ。

(i) $\dfrac{x^2-x}{x^2-3x-4}\div\dfrac{x-1}{x-4}$　　(ii) $\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{2}{x^2+2x}$

[解答]

(1) (i) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{x-1}$

(ii) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10}=\dfrac{(x-3)(x-5)}{(x+2)(x-5)}=\dfrac{x-3}{x+2}$

(2) (i)
$$\dfrac{x^2-x}{x^2-3x-4}\div\dfrac{x-1}{x-4}=\dfrac{x^2-x}{x^2-3x-4}\times\dfrac{x-4}{x-1}$$
$$=\dfrac{x(x-1)}{(x-4)(x+1)}\times\dfrac{x-4}{x-1}$$
$$=\dfrac{x}{x+1}$$

(ii)
$$\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{2}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{2}{x(x+2)}$$
$$=\dfrac{x+2}{x(x+1)(x+2)}-\dfrac{2(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$
$$=\dfrac{x+2-2(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$
$$=\dfrac{-x}{x(x+1)(x+2)}$$
$$=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$$

第 2 講　式と証明

PART1　恒等式

1　等式 $2x^2-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

[解答]

等式の右辺を x について整理すると

$$2x^2-1=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)$$

これが x についての恒等式となるのは

$$2=a,\quad 0=-2a+b,\quad -1=a-b+c$$

これを解くと　$a=2$，$b=4$，$c=1$

PART2 等式の証明

2 次の等式を証明せよ。

(1) $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

(2) $a+b+c=0$ のとき，$a^2+b^2=c^2-2ab$

(3) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

[解答]

(1) (右辺)$=x^4+x^3+x^2+x-x^3-x^2-x-1=x^4-1=$(左辺)

よって　$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

(2) $a+b+c=0$ より $a=-b-c$

このとき

(左辺)$=(-b-c)^2+b^2=b^2+2bc+c^2+b^2=2b^2+2bc+c^2$

(右辺)$=c^2-2(-b-c)b=c^2+2b^2+2bc=2b^2+2bc+c^2$

よって　$a^2+b^2=c^2-2ab$

(3) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

このとき

(左辺)$=\dfrac{bk+dk}{b+d}=\dfrac{k(b+d)}{b+d}=k$

(右辺)$=\dfrac{bk-dk}{b-d}=\dfrac{k(b-d)}{b-d}=k$

よって　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

PART3 不等式の証明

3 (1) $a>1$，$b>1$ のとき，不等式 $ab+1>a+b$ を証明せよ。

(2) x，y が実数のとき，不等式 $9x^2+y^2 \geqq -6xy$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

[解答]

(1) $(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1=(b-1)a-(b-1)=(a-1)(b-1)$

$a>1$，$b>1$ より $a-1>0$，$b-1>0$

よって　$(a-1)(b-1)>0$

したがって，$(ab+1)-(a+b)>0$ より，$ab+1>a+b$

(2) $(9x^2+y^2)-(-6xy)=9x^2+6xy+y^2=(3x+y)^2 \geqq 0$

よって　$9x^2+y^2 \geqq -6xy$

等号が成り立つのは，$3x+y=0$ のときである。

PART4 平方の大小関係

4 $a>0$ のとき，不等式 $1+\sqrt{a}>\sqrt{1+a}$ を証明せよ。

[解答]

両辺の平方の差を考えると

$$(1+\sqrt{a})^2-(\sqrt{1+a})^2=(1+2\sqrt{a}+a)-(1+a)=2\sqrt{a}$$

$a>0$ であるから

$$2\sqrt{a}>0$$

よって

$$(1+\sqrt{a})^2>(\sqrt{1+a})^2$$

$1+\sqrt{a}>0$，$\sqrt{1+a}>0$ であるから　$1+\sqrt{a}>\sqrt{1+a}$

PART5 相加平均と相乗平均

5 $x>0$ のとき, 不等式 $x+\dfrac{4}{x}\geqq 4$ を証明せよ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか。

[解答]

$x>0$, $\dfrac{4}{x}>0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係から

$$x+\frac{4}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=2\cdot 2=4$$

よって　$x+\dfrac{4}{x}\geqq 4$

等号が成り立つのは $x=\dfrac{4}{x}$，つまり $x^2=4$ のときで，$x>0$ より $x=2$ のときである。

第3講　複素数と2次方程式

PART1　複素数とその計算

1 (1) 次の計算をせよ。

(i) $(3+2i)-(2-4i)$　(ii) i^3+i^2+i+1　(iii) $(2-i)(3+5i)$

(2) 次の式を計算せよ。

(i) $\dfrac{4}{2+3i}$　(ii) $\dfrac{2i}{1-i}$

[解答]

(1) (i) $(3+2i)-(2-4i)=(3-2)+(2+4)i=1+6i$

(ii) $i^3+i^2+i+1=i^2\cdot i+i^2+i+1=-i-1+i+1=0$

(iii) $(2-i)(3+5i)=6+10i-3i-5i^2=6+10i-3i+5=11+7i$

(2) (i) $\dfrac{4}{2+3i}=\dfrac{4(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{4(2-3i)}{4-9i^2}=\dfrac{8-12i}{13}=\dfrac{8}{13}-\dfrac{12}{13}i$

(ii) $\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i(1+i)}{1-i^2}=\dfrac{2i(1+i)}{2}=i(1+i)=i+i^2=-1+i$

PART2 負の数の平方根と2次方程式

2 (1) 次の計算をせよ。

(i) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}$　　(ii) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

(2) 次の2次方程式を解け。

(i) $x^2=-9$　　(ii) $7x^2-2x+1=0$

[解答]

(1) (i) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{6}\,i=\sqrt{12}\,i^2=-2\sqrt{3}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i}=\dfrac{3}{i}=\dfrac{3i}{i^2}=-3i$

(2) (i) $x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}\,i=\pm3i$

(ii) $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot7\cdot1}}{2\cdot7}=\dfrac{2\pm\sqrt{-24}}{14}=\dfrac{2\pm\sqrt{24}\,i}{14}=\dfrac{2\pm2\sqrt{6}\,i}{14}=\dfrac{1\pm\sqrt{6}\,i}{7}$

(別解)

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-7\cdot1}}{7}=\dfrac{1\pm\sqrt{-6}}{7}=\dfrac{1\pm\sqrt{6}\,i}{7}$

PART3　2 次方程式の解の判別

3　(1)　次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

(i)　$2x^2-3x+4=0$　　(ii)　$3x^2+4x-1=0$

(iii)　$x^2+2\sqrt{3}\,x+3=0$

(2)　2 次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ が実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

[解答]

(1)　2 次方程式の判別式を D とする。

(i)　$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot4=9-32=-23<0$

よって，異なる 2 つの虚数解をもつ

(ii)　$\dfrac{D}{4}=2^2-3\cdot(-1)=7>0$

よって，異なる 2 つの実数解をもつ

(iii)　$\dfrac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot3=3-3=0$

よって，重解をもつ

(2)　この 2 次方程式の判別式を D とすると，実数解をもつから，$D\geqq0$

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(a+2)=a^2-a-2=(a-2)(a+1)$$

よって，$(a-2)(a+1)\geqq0$ より，求める a の値の範囲は $a\leqq-1$，$2\leqq a$

PART4　2 次方程式の解と係数の関係

4　(1)　2 次方程式 $x^2-x-5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\alpha+\beta$　(ii)　$\alpha\beta$　(iii)　$\alpha^2+\beta^2$　(iv)　$\alpha^3+\beta^3$

(2)　2 次式 $2x^2+6x+3$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3)　2 数 $-1+4i$，$-1-4i$ を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作れ。

[解答]

(1) (i)　解と係数の関係より　$\alpha+\beta=1$

(ii)　解と係数の関係より　$\alpha\beta=-5$

(iii)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-5)=1+10=11$

(iv)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot(-5)\cdot1=16$

(2)　2 次方程式 $2x^2+6x+3=0$ の解は $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-2\cdot3}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$

よって

$$2x^2+6x+3=2\left(x-\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(x+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$$

(3)　2 数 $-1+4i$，$-1-4i$ の

和は　$(-1+4i)+(-1-4i)=-2$

積は　$(-1+4i)(-1-4i)=(-1)^2-(4i)^2=1+16=17$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$x^2-(-2)x+17=0$　　つまり　　$x^2+2x+17=0$

第 4 講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

PART1 剰余の定理

1 多項式 $P(x)=x^3+3x^2-2x+4$ を次の 1 次式で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$x-1$　　(2)　$x+3$　　(3)　$2x-1$

[解答]

(1)　$P(1)=1^3+3\cdot1^2-2\cdot1+4=6$

(2)　$P(-3)=(-3)^3+3\cdot(-3)^2-2\cdot(-3)+4=10$

(3)　$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+4=\frac{31}{8}$

PART2 因数定理

2 因数定理を用いて，$2x^3+9x^2-6x-5$ を因数分解せよ。

[解答]

$P(x)=2x^3+9x^2-6x-5$ とおくと

$$P(1)=2\cdot1^3+9\cdot1^2-6\cdot1-5=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-1$ で割ると，商は $2x^2+11x+5$

$$\begin{array}{r|llll} & 2x^2 & +11x & +5 & \\ \hline x-1 & 2x^3+ & 9x^2- & 6x-5 & \\ & 2x^3- & 2x^2 & & \\ \hline & & 11x^2- & 6x & \\ & & 11x^2- & 11x & \\ \hline & & & 5x-5 & \\ & & & 5x-5 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

したがって

$$\begin{aligned}2x^3+9x^2-6x-5&=(x-1)\left(2x^2+11x+5\right)\\&=(x-1)(2x+1)(x+5)\end{aligned}$$

PART3 組立除法と因数分解

3 組立除法を用いて，多項式 $x^3+x^2-21x-45$ を因数分解せよ。

[解答]

$P(x)=x^3+x^2-21x-45$ とおくと

$$P(-3)=(-3)^3+(-3)^2-21\cdot(-3)-45=0$$

よって，$P(x)$ は $x+3$ を因数にもつ。

組立除法により，$P(x)$ を $x+3$ で割ると，

商は $x^2-2x-15$

1	1	−21	−45	|−3
	−3	6	45	
1	−2	−15	0	

したがって

$$\begin{aligned} x^3+x^2-21x-45 &= (x+3)(x^2-2x-15) \\ &= (x+3)(x+3)(x-5) \\ &= (x+3)^2(x-5) \end{aligned}$$

PART4 高次方程式の解法

4 次の方程式を解け。

(1) $x^3+27=0$　　(2) $x^4-3x^2-4=0$

(3) $x^3-3x^2-8x-4=0$　　(4) $x^3+4x^2-3x-18=0$

[解答]

(1) $x^3+27=0$

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

よって　$x=-3,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$

(2) $x^2=t$ とおくと $t^2-3t-4=0$

$(t+1)(t-4)=0$　　つまり　$(x^2+1)(x^2-4)=0$

よって，$x^2+1=0$ または $x^2-4=0$

$x^2+1=0$ より，$x^2=-1$　　$x=\pm i$

$x^2-4=0$ より，$x^2=4$　　$x=\pm2$

したがって　$x=\pm2,\ \pm i$

(3) $P(x)=x^3-3x^2-8x-4$ とおくと

$P(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-4=0$

より，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$P(x)=(x+1)(x^2-4x-4)$

$P(x)=0$ より，$x+1=0$ または $x^2-4x-4=0$

したがって　$x=-1,\ 2\pm2\sqrt{2}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-4x-4 \\
x+1 & x^3-3x^2-8x-4 \\
 & x^3+x^2 \\ \hline
 & -4x^2-8x \\
 & -4x^2-4x \\ \hline
 & -4x-4 \\
 & -4x-4 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

(4) $P(x)=x^3+4x^2-3x-18$ とおくと

$$P(2)=2^3+4\cdot2^2-3\cdot2-18=0$$

より，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x-2)\left(x^2+6x+9\right)=(x-2)(x+3)^2$$

$P(x)=0$ より，$x=2$，-3

$$\begin{array}{r|l} & x^2+6x+9 \\ \hline x-2 & x^3+4x^2-3x-18 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & 6x^2-3x \\ & 6x^2-12x \\ \hline & 9x-18 \\ & 9x-18 \\ \hline & 0 \end{array}$$

第 5 講　点と直線

PART1　2 点間の距離，数直線上の分点の座標

1　2 点 A(-3)，B(5) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

(1)　3：2 に内分する点　　(2)　中点

(3)　7：3 に外分する点　　(4)　1：4 に外分する点

[解答]

(1)　$\dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot5}{3+2}=\dfrac{9}{5}$

(2)　$\dfrac{1\cdot(-3)+1\cdot5}{1+1}=\dfrac{2}{2}=1$

(3)　$\dfrac{(-3)\cdot(-3)+7\cdot5}{7-3}=\dfrac{44}{4}=11$

(4)　$\dfrac{4\cdot(-3)+(-1)\cdot5}{-1+4}=\dfrac{-17}{3}=-\dfrac{17}{3}$

PART2 座標平面上の点

2 3 点 A(2, −2), B(5, 4), C(−1, 3) について，次のものを求めよ。

(1) 線分 AB の長さ

(2) 線分 AB を 2：1 に内分する点の座標

(3) 線分 AB を 1：3 に外分する点の座標

(4) △ABC の重心の座標

[解答]

(1) $AB=\sqrt{(5-2)^2+\{4-(-2)\}^2}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

(2) $\left(\dfrac{1\cdot2+2\cdot5}{2+1},\ \dfrac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{2+1}\right)$ より $(4,\ 2)$

(3) $\left(\dfrac{3\cdot2+(-1)\cdot5}{-1+3},\ \dfrac{3\cdot(-2)+(-1)\cdot4}{-1+3}\right)$ より $\left(\dfrac{1}{2},\ -5\right)$

(4) $\left(\dfrac{2+5-1}{3},\ \dfrac{-2+4+3}{3}\right)$ より $\left(2,\ \dfrac{5}{3}\right)$

PART3 直線の方程式

3 次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2,\ 1)$ を通り，傾きが 3

(2) 点 $(4,\ 1)$ を通り，x 軸に平行

(3) 2 点 $(-1,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を通る

(4) 2 点 $(-3,\ 0)$，$(-3,\ 5)$ を通る

[解答]

(1) $y-1=3(x-2)$　　$y=3(x-2)+1$　　よって　$y=3x-5$

(2) $y=1$

(3) $y-2=\dfrac{-2-2}{4-(-1)}\{x-(-1)\}$　　$y=-\dfrac{4}{5}(x+1)+2$　　よって　$y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{6}{5}$

(4) $x=-3$

PART4 2 直線の関係

4 点 $(5,\ 2)$ を通り，直線 $x+3y+1=0$ に平行な直線 l_1，垂直な直線 l_2 の方程式をそれぞれ求めよ。

[解答]

直線 $x+3y+1=0$ の傾きは $-\dfrac{1}{3}$

直線 l_1 の傾きは $-\dfrac{1}{3}$ である。よって，直線 l_1 の方程式は

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-5) \qquad y=-\frac{1}{3}(x-5)+2 \quad \text{より} \quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$$

直線 l_2 の傾きを m とすると $\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot m=-1$ 　より　$m=3$

よって，直線 l_2 の方程式は

$$y-2=3(x-5) \qquad y=3(x-5)+2 \quad \text{より} \quad y=3x-13$$

PART5 点と直線の距離

5 次の点と直線の距離を求めよ。

(1) 原点と直線 $3x+4y+5=0$

(2) 点 $(1,\ -3)$ と直線 $x-2y-13=0$

[解答]

(1) $\dfrac{|3\cdot 0+4\cdot 0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{25}}=\dfrac{5}{5}=1$

(2) $\dfrac{|1-2\cdot(-3)-13|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

第 6 講　円

PART1　円の方程式

1　(1)　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i)　中心が点 $(1,\ -1)$ で，半径が 2

(ii)　中心が原点で，点 $(3,\ -4)$ を通る

(iii)　3 点 $(0,\ 2)$，$(6,\ 0)$，$(7,\ 3)$ を通る

(2)　方程式 $x^2+y^2+4x-8y+17=0$ はどのような図形を表すか。

[解答]

(1) (i)　$(x-1)^2+\{y-(-1)\}^2=2^2$　　すなわち　　$(x-1)^2+(y+1)^2=4$

(ii)　半径 r は中心 $(0,\ 0)$ と点 $(3,\ -4)$ の距離であるから

$$r^2=3^2+(-4)^2=25$$

よって，求める円の方程式は $x^2+y^2=25$

(iii)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

この円が 3 点 $(0,\ 2)$，$(6,\ 0)$，$(7,\ 3)$ を通るので

$$\begin{cases} 0^2+2^2+2m+n=0 \\ 6^2+0^2+6l+n=0 \\ 7^2+3^2+7l+3m+n=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 2m+n=-4 & \cdots\cdots ① \\ 6l+n=-36 & \cdots\cdots ② \\ 7l+3m+n=-58 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①−②より $-6l+2m=32$　　すなわち　　$3l-m=-16$　…… ④

②−③より $-l-3m=22$　　すなわち　　$l+3m=-22$　…… ⑤

④，⑤より $l=-7$，$m=-5$　　このとき，①より $n=6$

よって，求める円の方程式は $x^2+y^2-7x-5y+6=0$

(2)　$x^2+y^2+4x-8y+17=0$ を変形すると

$$(x+2)^2-4+(y-4)^2-16+17=0$$

$$(x+2)^2+(y-4)^2=3$$

よって，この方程式は点 $(-2,\ 4)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円を表す。

PART2 円と直線の共有点の座標と個数

2 次の円と直線の共有点の個数を求めよ。また，共有点がある場合はその座標を求めよ。

(1) $x^2+y^2=5$，$y=2x-5$

(2) $x^2+y^2=2$，$y=-2x+1$

(3) $x^2+y^2=8$，$y=x+6$

[解答]

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ① \\ y=2x-5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して　$x^2+(2x-5)^2=5$

$x^2-4x+4=0$　$(x-2)^2=0$　$x=2$

このとき②より $y=-1$

よって，共有点の個数は 1 個　その座標は $(2,\ -1)$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots\cdots ① \\ y=-2x+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して　$x^2+(-2x+1)^2=2$

$5x^2-4x-1=0$　$(5x+1)(x-1)=0$　$x=-\dfrac{1}{5},\ 1$

②より　$x=-\dfrac{1}{5}$ のとき $y=\dfrac{7}{5}$　$x=1$ のとき $y=-1$

よって，共有点の個数は 2 個　その座標は $\left(-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$，$(1,\ -1)$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=8 & \cdots\cdots ① \\ y=x+6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して　$x^2+(x+6)^2=8$　$2x^2+12x+28=0$　$x^2+6x+14=0$

この方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=3^2-1\cdot 14=-5<0$

よって，共有点の個数は 0 個

PART3 円と直線の位置関係

3 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=3x+k$ について，次の問いに答えよ。

(1) 円と直線が接するとき，定数 k の値を求めよ。

(2) 円と直線が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

[解答]

[判別式を用いる方法]

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots① \\ y=3x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②を①に代入して $x^2+(3x+k)^2=10$

整理すると $10x^2+6kx+k^2-10=0$

この方程式の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=(3k)^2-10\cdot(k^2-10)=-k^2+100$

(1) 円①と直線②が接するのは $D=0$ のときであるから

$$-k^2+100=0 \qquad k^2=100 \qquad \text{よって } k=\pm 10$$

(2) 円①と直線②が共有点をもたないのは $D<0$ のときであるから

$$-k^2+100<0 \qquad k^2>100 \qquad \text{よって } k<-10,\ 10<k$$

[点と直線の距離を用いる方法]

円 $x^2+y^2=10$ の中心は原点 $(0,\ 0)$，半径は $r=\sqrt{10}$

点 $(0,\ 0)$ と直線 $3x-y+k=0$ の距離は $d=\dfrac{|3\cdot 0-1\cdot 0+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{10}}$

(1) 円①と直線②が接するのは $d=r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \qquad |k|=10 \qquad \text{よって } k=\pm 10$$

(2) 円①と直線②が共有点をもたないのは $d>r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}}>\sqrt{10} \qquad |k|>10 \qquad \text{よって } k<-10,\ 10<k$$

PART4 円の接線

4 (1) 円 $x^2+y^2=5$ 上の点 P(2, 1) における接線の方程式を求めよ。

(2) 点 A(4, −2) から円 $x^2+y^2=10$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

[解答]

(1) $2\cdot x+1\cdot y=5$　すなわち　$2x+y=5$

(2) 接点を $P(x_1,\ y_1)$ とすると，点 P における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=10 \cdots\cdots ①$$

この直線が点 A(4, −2) を通るので $4x_1-2y_1=10$　すなわち $2x_1-y_1=5 \cdots\cdots ②$

また，点 P は円上の点であるから　$x_1^2+y_1^2=10 \cdots\cdots ③$

②より　$y_1=2x_1-5 \cdots\cdots ④$

これを③に代入して整理すると　$x_1^2-4x_1+3=0$　　これを解いて $x_1=1,\ 3$

④より　$x_1=1$ のとき　$y_1=-3$　　　$x_1=3$ のとき　$y_1=1$

したがって①から，求める接線の方程式は

$$x-3y=10,\ 3x+y=10$$

また，接点の座標は　(1, −3)，(3, 1)

第 7 講　軌跡と領域

PART1　軌跡の方程式

1　次の条件を満たす点Ｐの軌跡を求めよ。

(1)　2 点 A(2, 5)，B(6, 3) から等距離にある点Ｐ

(2)　2 点 A(1, 1)，B(4, 7) からの距離の比が 1：2 である点Ｐ

[解答]

(1)　点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$　より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(x-2)^2+(y-5)^2=(x-6)^2+(y-3)^2$

整理すると　$2x-y-4=0$

よって，点Ｐは直線 $2x-y-4=0$ 上にある。

逆に，この直線上のすべての点Ｐは，条件 $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ を満たす。

したがって，求める点Ｐの軌跡は 直線 $2x-y-4=0$

(2)　点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$　より　$\mathrm{BP}=2\mathrm{AP}$　つまり　$\mathrm{BP}^2=4\mathrm{AP}^2$

よって　$(x-4)^2+(y-7)^2=4\{(x-1)^2+(y-1)^2\}$

整理すると　$x^2+y^2+2y-19=0$

すなわち　$x^2+(y+1)^2=20$

よって，点Ｐは円 $x^2+(y+1)^2=20$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点Ｐは，条件を満たす。

したがって，求める点Ｐの軌跡は 中心 $(0,\ -1)$，半径 $2\sqrt{5}$ の円

PART2 不等式の表す領域

2 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y > 2x+1$　　(2)　$x+3y \leqq 3$

(3)　$x \geqq 1$　　(4)　$y-2 < 0$

(5)　$x^2+y^2 < 9$　　(6)　$(x-1)^2+(y-2)^2 \geqq 2$

[解答]

(1)　直線 $y=2x+1$ の上側。

(2)　$x+3y \leqq 3$ より $y \leqq -\frac{1}{3}x+1$　　よって，直線 $y=-\frac{1}{3}x+1$ およびその下側。

(3)　直線 $x=1$ およびその右側。

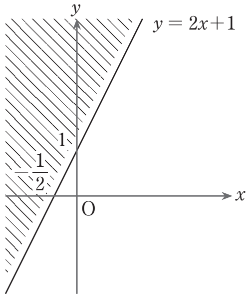
(4)　$y-2<0$ より $y<2$　　よって，直線 $y=2$ の下側。

(5)　円 $x^2+y^2=9$ の内部。

(6)　円 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$ およびその外部。

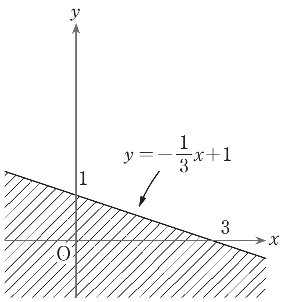
よって，求める領域は下図斜線部分。

(1)



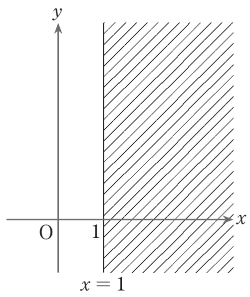
ただし，境界線は含まない。

(2)



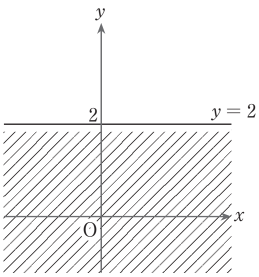
ただし，境界線を含む。

(3)



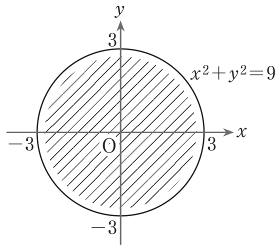
ただし，境界線を含む。

(4)



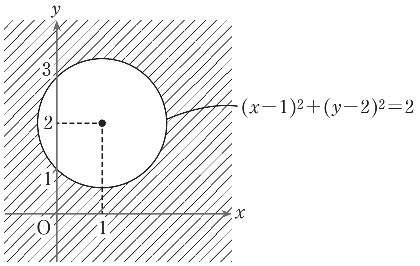
ただし，境界線は含まない。

(5)



ただし，境界線は含まない。

(6)



ただし，境界線を含む。

PART3 連立不等式の表す領域

3 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} x+y-3>0 \\ x-y-3<0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 9 \\ y \leqq x+3 \end{cases}$

[解答]

(1) $\begin{cases} x+y-3>0 & \cdots\cdots ① \\ x-y-3<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①より $y>-x+3$

よって，①の表す領域は，直線 $y=-x+3$ の上側

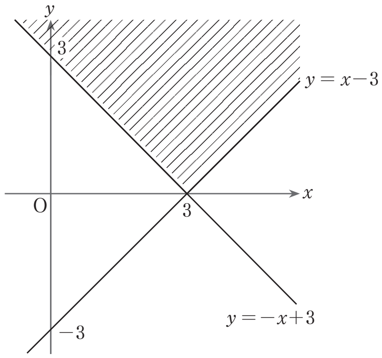
②より $y>x-3$

よって，②の表す領域は，直線 $y=x-3$ の上側

また，2 直線 $y=-x+3$ と $y=x-3$ の交点の座標は $(3,\ 0)$

よって，求める領域は，右図斜線部分。

ただし，境界線は含まない。



(2) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 9 & \cdots\cdots ① \\ y \leqq x+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

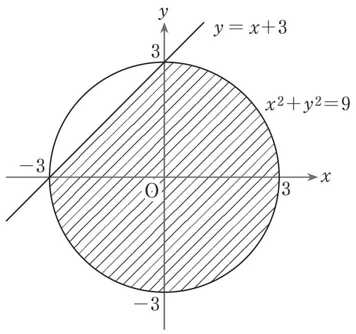
①が表す領域は，円 $x^2+y^2=9$ およびその内部

②が表す領域は，直線 $y=x+3$ およびその下側

また，円 $x^2+y^2=9$ と直線 $y=x+3$ の交点の座標は $(-3,\ 0)$，$(0,\ 3)$

よって，求める領域は，右図斜線部分。

ただし，境界線を含む。



PART4 領域と最大・最小

4 x，y が4つの不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+2y \leqq 6,\ 5x+2y \leqq 14$$

を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

[解答]

与えられた連立不等式の表す領域を D とすると，

D は4点 $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{14}{5},\ 0\right)$，$(2,\ 2)$，$(0,\ 3)$ を

頂点とする四角形の周および内部である。

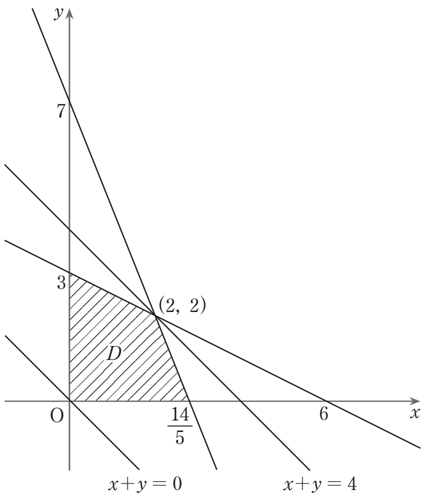
$x+y=k$ …… ①

とおくと，$y=-x+k$ より，①は傾きが -1，

切片が k の直線である。

この直線が領域 D と共有点をもつような k の値の

最大値と最小値を求める。



図より，k の値が最大になるのは直線①が点 $(2,\ 2)$

を通るときであり，最小になるのは直線①が点 $(0,\ 0)$

を通るときである。

したがって，$x+y$ は

$x=2$，$y=2$ のとき　最大値 4

$x=0$，$y=0$ のとき　最小値 0

をとる。

第 8 講　三角関数とその性質

PART1　動径と一般角

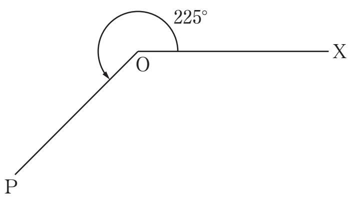
1　次の角の動径 OP を図示せよ。また，60° の動径と同じ位置にあるものはどれか。

(1)　225°　　(2)　420°

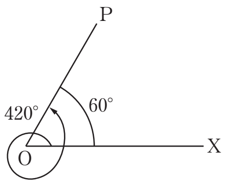
(3)　-60°　　(4)　870°

[解答]

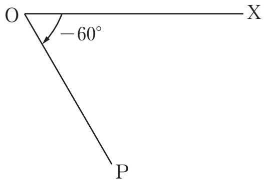
(1)



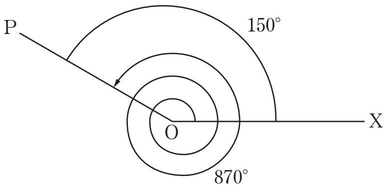
(2)　$420^\circ=60^\circ+360^\circ$



(3)



(4)　$870^\circ=150^\circ+360^\circ\times 2$



60° の動径と同じ位置にあるものは (2)

PART2 弧度法

2 (1) 次の角を弧度法で表せ。

(i) 30°　(ii) 495°　(iii) -120°

(2) 次の角を度数法で表せ。

(i) $\frac{5}{4}\pi$　(ii) $-\frac{\pi}{3}$　(iii) $\frac{13}{6}\pi$

(3) 半径 6，中心角 $\frac{3}{5}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

[解答]

(1) (i) $\frac{\pi}{180}\times 30=\frac{\pi}{6}$　(ii) $\frac{\pi}{180}\times 495=\frac{11}{4}\pi$　(iii) $\frac{\pi}{180}\times(-120)=-\frac{2}{3}\pi$

(2) (i) $\frac{5}{4}\times 180^\circ=225^\circ$　(ii) $-\frac{1}{3}\times 180^\circ=-60^\circ$　(iii) $\frac{13}{6}\times 180^\circ=390^\circ$

(3) $l=6\times\frac{3}{5}\pi=\frac{18}{5}\pi$，$S=\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{3}{5}\pi=\frac{54}{5}\pi$

PART3 三角関数

3 次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1) $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$　(2) $\theta=\dfrac{11}{6}\pi$　(3) $\theta=-\dfrac{7}{4}\pi$　(4) $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

[解答]

(1) $\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$\tan\dfrac{4}{3}\pi=\sqrt{3}$

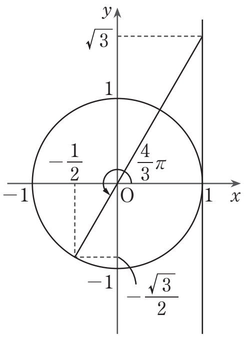
(2) $\sin\dfrac{11}{6}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{11}{6}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\dfrac{11}{6}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $\sin\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right)=1$

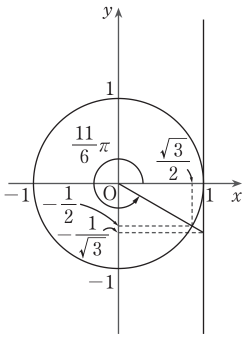
(4) $\sin\dfrac{3}{2}\pi=-1$，$\cos\dfrac{3}{2}\pi=0$，$\tan\dfrac{3}{2}\pi$ は定義されない

(参考図)

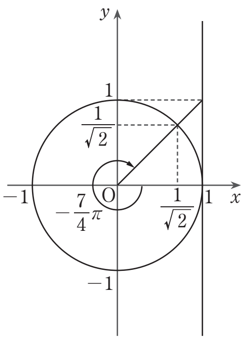
(1)



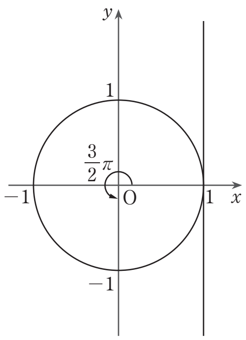
(2)



(3)



(4)



PART4 三角関数の相互関係

4 (1) θ が第 4 象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) θ が第 3 象限の角で，$\tan\theta=3$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

[解答]

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　より　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

θ が第 4 象限の角であるから，$\sin\theta<0$　　よって　$\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{4}{5}\right)\div\frac{3}{5}=-\frac{4}{3}$$

(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　より　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+3^2=10$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$

θ が第 3 象限の角であるから，$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=3\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\left(=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

PART5 三角関数の性質

5 次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{9}{4}\pi$，$\cos\frac{9}{4}\pi$　　(2) $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$，$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$　　(3) $\sin\frac{7}{6}\pi$，$\cos\frac{7}{6}\pi$

[解答]

(1) $\sin\frac{9}{4}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\frac{9}{4}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=-\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

(3) $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{7}{6}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

第 9 講　三角関数のグラフ

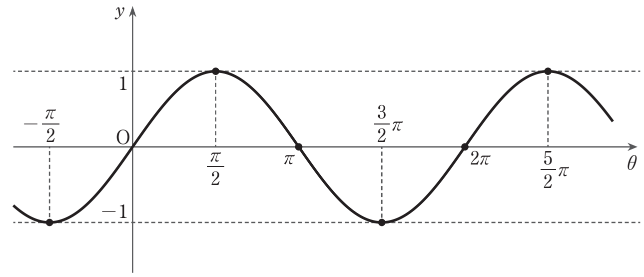
PART1　三角関数のグラフ

1　次の関数のグラフをかけ。

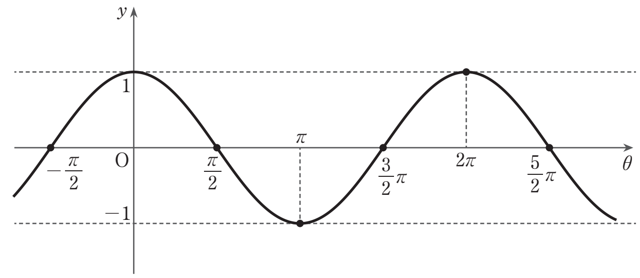
(1)　$y=\sin\theta$　　(2)　$y=\cos\theta$　　(3)　$y=\tan\theta$

[解答]

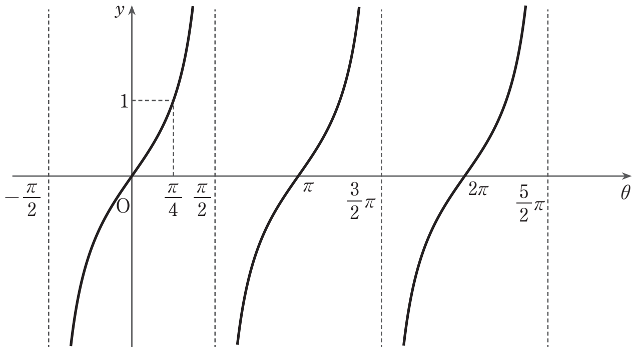
(1)



(2)



(3)



PART2 いろいろな三角関数のグラフ

2 (1) 次の □ にあてはまるものを，下の①～⑦から選べ。ただし，同じものを選んでもよいとする。

(i) 関数 $y=2\cos\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを [ア] 軸方向に [イ] 倍したものである。また，その周期は [ウ] である。

(ii) 関数 $y=\cos 2\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを [エ] 軸方向に [オ] 倍したものである。また，その周期は [カ] である。

(iii) 関数 $y=\tan\dfrac{\theta}{2}$ の周期は [キ] である。

① θ　② y　③ 2　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 2π　⑥ π　⑦ $\dfrac{\pi}{2}$

(2) $y=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

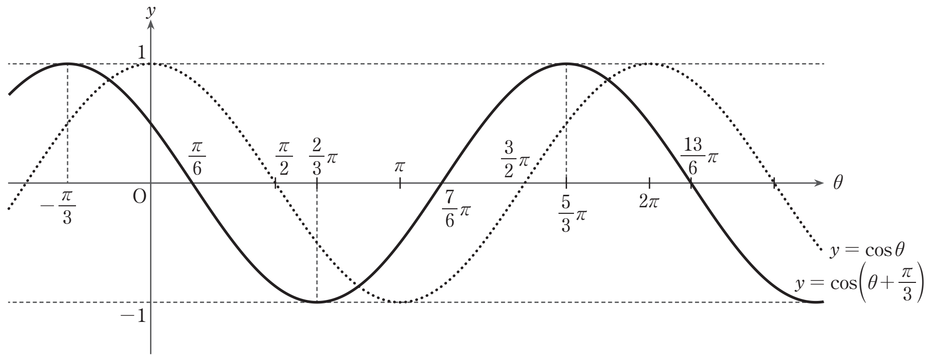
[解答]

(1) (i) ア ②　イ ③　ウ ⑤

(ii) エ ①　オ ④　カ ⑥

(iii) キ ⑤

(2)



周期は 2π

第 10 講　三角関数を含む方程式，不等式

PART1　三角関数を含む方程式

1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

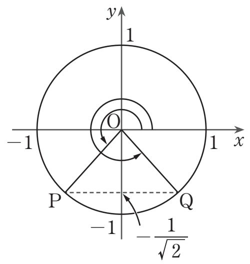
(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　(3)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

[解答]

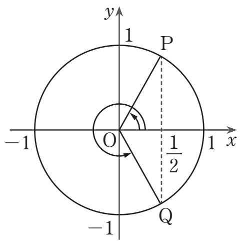
(1)　$\theta = \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$　(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$　(3)　$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

(参考図)

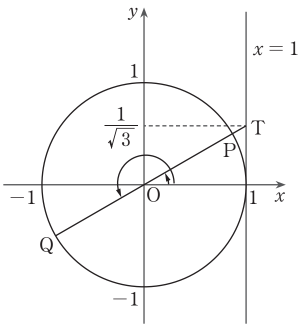
(1)



(2)



(3)



PART2 三角関数を含む不等式

2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

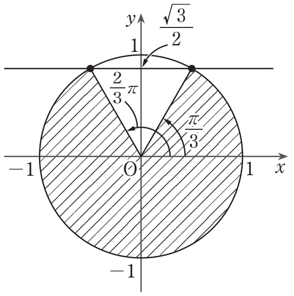
(1)　$\sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2)　$\cos\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[解答]

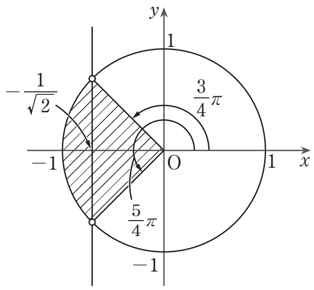
(1)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi$　　　(2)　$\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi$

(参考図)

(1)



(2)



第11講　加法定理

PART1　正弦・余弦の加法定理

1　α は第 1 象限の角，β は第 3 象限の角であるとする。$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=-\frac{12}{13}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(2)　$\cos(\alpha+\beta)$

(3)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(4)　$\cos(\alpha-\beta)$

[解答]

α は第 1 象限の角であるから　$\cos\alpha>0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

β は第 3 象限の角であるから　$\sin\beta<0$

よって　$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$

(1)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{63}{65}$

(2)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{16}{65}$

(3)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{33}{65}$

(4)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{56}{65}$

PART2 正接の加法定理，2 直線のなす角

2 2 直線 $y=3x$ ……①，$y=\dfrac{1}{2}x$ ……② と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とする。

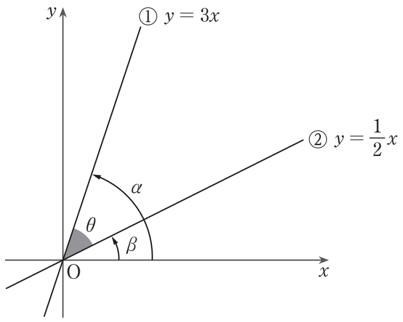
(1) $\tan\alpha$，$\tan\beta$ の値を求めよ。

(2) $\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(3) 2 直線①，②のなす角 θ を求めよ。

[解答]

(1) $\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$



(2) $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{3+\frac{1}{2}}{1-3\cdot\frac{1}{2}}=\frac{6+1}{2-3}=-7$$

(3) $$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=\frac{6-1}{2+3}=1$$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

PART3　2 倍角の公式，半角の公式

3　$0<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$

(2)　$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$

[解答]

$0<\alpha<\pi$ より，$\sin\alpha>0$

よって　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

(1)　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=-\dfrac{7}{25}$

(2)　$0<\alpha<\pi$ より $0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{2}=\dfrac{5+3}{10}=\dfrac{4}{5}$　　よって　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}=\dfrac{1+\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{2}=\dfrac{5-3}{10}=\dfrac{1}{5}$　　よって　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

PART4 三角関数の合成

4 (1) 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(i) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　(ii) $\sin\theta-\cos\theta$

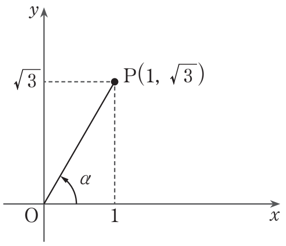
(2) 関数 $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

[解答]

(1) (i) 点 $P(1,\ \sqrt{3})$ をとると　$OP=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

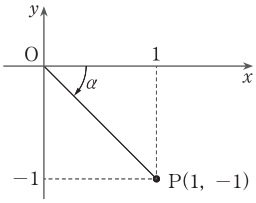
よって　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$



(ii) 点 $P(1,\ -1)$ をとると　$OP=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$

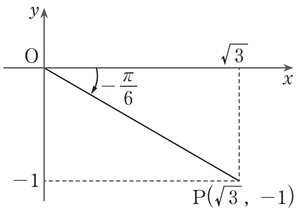
よって　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$



(2) $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$-1\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq1$ より　$-2\leqq2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq2$

よって　y の最大値は 2，最小値は -2



第12講　指数の拡張

PART1　0 や負の整数の指数

1　次の計算をせよ。

(1)　$a^5 \times a^{-3}$　　(2)　$a^{-6} \div a^{-2} \times a^4$

(3)　$(a^{-3})^{-4}$　　(4)　$(a^4 b^{-3})^{-2}$

[解答]

(1)　$a^5 \times a^{-3} = a^{5-3} = a^2$

(2)　$a^{-6} \div a^{-2} \times a^4 = a^{-6-(-2)+4} = a^{-6+2+4} = a^0 = 1$

(3)　$(a^{-3})^{-4} = a^{(-3)\times(-4)} = a^{12}$

(4)　$(a^4 b^{-3})^{-2} = a^{4\times(-2)} b^{(-3)\times(-2)} = a^{-8} b^6 = \dfrac{b^6}{a^8}$

PART2 累乗根

2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[3]{24}$　(2) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}$　(3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$　(5) $(\sqrt[6]{9})^3$

[解答]

(1) $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^3\times3}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

(2) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}=\sqrt[4]{5\times125}=\sqrt[4]{5^4}=5$

(3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3\times2]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

(5) $(\sqrt[6]{9})^3=(\sqrt[6]{3^2})^3=(\sqrt[3\times2]{3^{1\times2}})^3=(\sqrt[3]{3})^3=3$

PART3 有理数の指数

3 (1) 次の値を求めよ。

(i) $8^{\frac{2}{3}}$　　(ii) $9^{-\frac{1}{2}}$

(2) 次の計算をせよ。

(i) $3^{\frac{3}{4}}\times3^{\frac{2}{3}}\div3^{\frac{5}{12}}$　　(ii) $\left(8^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{9}}$

(iii) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt[6]{5}$　　(iv) $\sqrt[6]{32}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\sqrt[3]{2}$

[解答]

(1) (i) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=(\sqrt[3]{8})^2=(\sqrt[3]{2^3})^2=2^2=4$

(ii) $9^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{9}}=\dfrac{1}{3}$

(2) (i) $3^{\frac{3}{4}}\times3^{\frac{2}{3}}\div3^{\frac{5}{12}}=3^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{12}}=3^{\frac{9+8-5}{12}}=3^1=3$

(ii) $\left(8^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{9}}=8^{\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{9}}=8^{-\frac{1}{3}}=(2^3)^{-\frac{1}{3}}=2^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

(iii) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=5^{\frac{2+3+1}{6}}=5^1=5$

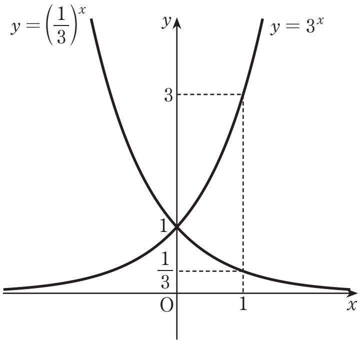
(iv) $\sqrt[6]{32}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\sqrt[3]{2}=(2^5)^{\frac{1}{6}}\times2^{-\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{5-3-2}{6}}=2^0=1$

第 13 講　指数関数

PART1　指数関数のグラフ

1　関数 $y=3^x$ のグラフと関数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを，同じ座標平面上にかけ。

[解答]



PART2 指数関数の性質

2

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1) $\dfrac{1}{9}$，$\sqrt[4]{27}$，1　　(2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$，$\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$，$\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}$

[解答]

(1) $\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3^2}=3^{-2}$，$\sqrt[4]{27}=(3^3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$，$1=3^0$

指数の大小について　$-2<0<\dfrac{3}{4}$

底 3 は 1 より大きいから　$3^{-2}<3^0<3^{\frac{3}{4}}$　　よって　$\dfrac{1}{9}<1<\sqrt[4]{27}$

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$

指数の大小について　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{3}{4}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

よって　$\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}<\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

PART3 指数関数を含む方程式・不等式

3 (1) 次の方程式を解け。

(i) $9^x = 243$　　(ii) $32^x = \frac{1}{16}$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $4^x < 64$　　(ii) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \geqq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

[解答]

(1) (i) $9^x = 243$ より $3^{2x} = 3^5$ よって $2x = 5$ したがって $x = \frac{5}{2}$

(ii) $32^x = \frac{1}{16}$ より $2^{5x} = 2^{-4}$ よって $5x = -4$ したがって $x = -\frac{4}{5}$

(2) (i) $4^x < 64$ より $2^{2x} < 2^6$

底 2 は 1 より大きいから $2x < 6$ したがって $x < 3$

(ii) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \geqq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ より $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \geqq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから $2x \leqq x-2$ したがって $x \leqq -2$

第 14 講　対数とその性質

PART1　対数

1 (1) 次の関係を $p=\log_a M$ の形にかけ。

(i) $2^6=64$　(ii) $3^{-2}=\dfrac{1}{9}$　(iii) $9^{\frac{1}{2}}=3$

(2) 次の関係を $a^p=M$ の形にかけ。

(i) $\log_5 125=3$　(ii) $\log_7 \dfrac{1}{7}=-1$　(iii) $\log_8 2=\dfrac{1}{3}$

(3) 次の対数の値を求めよ。

(i) $\log_{10} 1000$　(ii) $\log_3 \sqrt{3}$　(iii) $\log_4 \dfrac{1}{16}$

[解答]

(1) (i) $6=\log_2 64$　(ii) $-2=\log_3 \dfrac{1}{9}$　(iii) $\dfrac{1}{2}=\log_9 3$

(2) (i) $5^3=125$　(ii) $7^{-1}=\dfrac{1}{7}$　(iii) $8^{\frac{1}{3}}=2$

(3) (i) $\log_{10} 1000=\log_{10} 10^3=3$

(ii) $\log_3 \sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

(iii) $\log_4 \dfrac{1}{16}=\log_4 \dfrac{1}{4^2}=\log_4 4^{-2}=-2$

PART2 対数の性質

2

次の計算をせよ。

(1) $\log_8 2+\log_8 32$

(2) $\log_5 6-\log_5 30$

(3) $3\log_2 \sqrt[3]{6}-\log_2 3$

(4) $\log_3 \dfrac{\sqrt{6}}{3}+2\log_3 \sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6$

[解答]

(1) $\log_8 2+\log_8 32=\log_8 (2\times 32)=\log_8 64=\log_8 8^2=2$

(2) $\log_5 6-\log_5 30=\log_5 \dfrac{6}{30}=\log_5 \dfrac{1}{5}=\log_5 5^{-1}=-1$

(3) $3\log_2 \sqrt[3]{6}-\log_2 3=\log_2 \left(6^{\frac{1}{3}}\right)^3-\log_2 3=\log_2 6^{\frac{1}{3}\times 3}-\log_2 3$

$$=\log_2 6-\log_2 3=\log_2 \frac{6}{3}=\log_2 2=1$$

(4) $\log_3 \dfrac{\sqrt{6}}{3}+2\log_3 \sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6=\log_3 \dfrac{\sqrt{6}}{3}+\log_3 \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2-\log_3 6^{\frac{1}{2}}$

$$=\log_3 \frac{\sqrt{6}}{3}+\log_3 3-\log_3 \sqrt{6}$$

$$=\log_3 \frac{\sqrt{6}\times 3}{3\times\sqrt{6}}=\log_3 1=0$$

PART3 底の変換公式

3 (1) 次の値を求めよ。

(i) $\log_{16} 8$　　(ii) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$

(2) 次の計算をせよ。

(i) $\log_2 5 \cdot \log_5 32$　　(ii) $\log_9 49 - \log_3 63$

[解答]

(1) (i) $\log_{16} 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 16} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4} = \dfrac{3}{4}$

(ii) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = \dfrac{\log_3 \sqrt{27}}{\log_3 \dfrac{1}{3}} = \dfrac{\log_3 3^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{-1}} = \dfrac{\dfrac{3}{2}}{-1} = -\dfrac{3}{2}$

(2) (i) $\log_2 5 \cdot \log_5 32 = \log_2 5 \times \dfrac{\log_2 32}{\log_2 5} = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

(ii) $\log_9 49 - \log_3 63 = \dfrac{\log_3 49}{\log_3 9} - \log_3 63$

$= \dfrac{\log_3 7^2}{2} - \log_3 63$

$= \dfrac{2\log_3 7}{2} - \log_3 63$

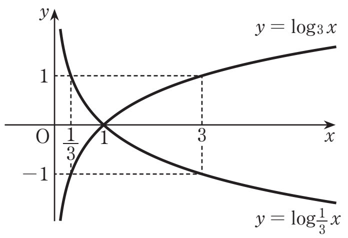
$= \log_3 \dfrac{7}{63} = \log_3 \dfrac{1}{3^2} = -2$

第 15 講　対数関数

PART1　対数関数のグラフ

1　関数 $y=\log_3 x$ のグラフと関数 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフを，同じ座標平面上にかけ。

[解答]



PART2 対数関数の性質

2 次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1) $2\log_{\frac{1}{2}}3$，0，$\log_{\frac{1}{2}}5$　　(2) $\log_3\dfrac{1}{2}$，$\log_9 4$，1

[解答]

(1) $2\log_{\frac{1}{2}}3=\log_{\frac{1}{2}}3^2=\log_{\frac{1}{2}}9$，$0=\log_{\frac{1}{2}}1$

真数の大小について　$1<5<9$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$\log_{\frac{1}{2}}9<\log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}1$

よって　$2\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}5<0$

(2) $\log_9 4=\dfrac{\log_3 4}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 2^2}{\log_3 3^2}=\dfrac{2\log_3 2}{2}=\log_3 2$，$1=\log_3 3$

真数の大小について　$\dfrac{1}{2}<2<3$

底 3 は 1 より大きいから　$\log_3\dfrac{1}{2}<\log_3 2<\log_3 3$

よって　$\log_3\dfrac{1}{2}<\log_9 4<1$

PART3 対数関数を含む方程式・不等式

3 (1) 次の方程式を解け。

(i) $\log_3 x = 4$　　(ii) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $\log_4 x \leqq 3$　　(ii) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 2$

[解答]

(1)(i) 真数は正であるから　$x > 0$　……①

このとき，対数の定義から　$x = 3^4 = 81$

これは①を満たすから　$x = 81$

(ii) 真数は正であるから $x-1 > 0$　よって　$x > 1$　……①

このとき，対数の定義から　$x-1 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$　　$x = \frac{1}{32} + 1 = \frac{33}{32}$

これは①を満たすから　$x = \frac{33}{32}$

(2)(i) 真数は正であるから　$x > 0$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_4 x \leqq \log_4 4^3$

すなわち　$\log_4 x \leqq \log_4 64$

底 4 は 1 より大きいから　$x \leqq 64$ …… ②

①，②より　$0 < x \leqq 64$

(ii) 真数は正であるから　$x-2 > 0$　よって　$x > 2$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$x-2 > \frac{1}{9}$　　よって　$x > \frac{19}{9}$ …… ②

①，②より　$x > \frac{19}{9}$

PART4 常用対数

4 (1) $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき，$\log_{10} 15$ の値を求めよ。

(2) 3^{30} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

[解答]

(1)
$$\begin{aligned}\log_{10} 15 = \log_{10}(3\times5) &= \log_{10} 3 + \log_{10} 5\\ &= \log_{10} 3 + \log_{10}\frac{10}{2}\\ &= \log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2\\ &= 0.4771 + 1 - 0.3010\\ &= 1.1761\end{aligned}$$

(2) 3^{30} の常用対数をとると

$$\log_{10} 3^{30} = 30\log_{10} 3 = 30\times0.4771 = 14.313$$

よって　$14 < \log_{10} 3^{30} < 15$　より　$10^{14} < 3^{30} < 10^{15}$

したがって 3^{30} は 15 桁の整数である。

第 16 講　微分係数と導関数

PART1　平均の速さ，平均変化率

1　関数 $f(x)=-3x^2$ において，x の値が次のように変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ。

(1)　-1 から 2 まで　　(2)　1 から $1+h$ まで　$(h \neq 0)$

[解答]

(1)　$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{-3\cdot 2^2-\{-3\cdot(-1)^2\}}{3}=\dfrac{-12+3}{3}=-3$

(2)　$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\dfrac{\{-3(1+h)^2\}-(-3\cdot 1^2)}{h}=\dfrac{(-3-6h-3h^2)-(-3)}{h}=\dfrac{-3h^2-6h}{h}$

$=\dfrac{h(-3h-6)}{h}=-3h-6$

PART2 極限値と微分係数

2 (1) 次の極限値を求めよ。

(i) $\lim_{x\to 0}(4+x)$　　(ii) $\lim_{h\to 0}\dfrac{h^2-5h}{h}$

(2) 関数 $f(x)=-2x^2$ の $x=-1$ における微分係数を求めよ。

(3) 曲線 $y=x^2+1$ 上の点 $(2,\ 5)$ における接線の傾きを求めよ。

[解答]

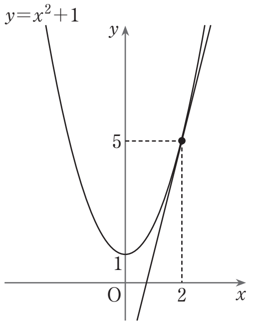
(1) (i) $\lim_{x\to 0}(4+x)=4$

(ii) $\lim_{h\to 0}\dfrac{h^2-5h}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h(h-5)}{h}=\lim_{h\to 0}(h-5)=-5$

(2) $$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2(-1+h)^2-(-2)\cdot(-1)^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2(1-2h+h^2)+2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h-2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(4-2h)=4$$

(3) $f(x)=x^2+1$ とおくと，曲線 $y=x^2+1$ 上の点 $(2,\ 5)$ における接線の傾きは $f'(2)$ であるから

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(2+h)^2+1\}-(2^2+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(4+4h+h^2+1)-(4+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$



PART3 導関数

3 導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x$　　(2) $f(x)=x^2$

(3) $f(x)=x^3$　　(4) $f(x)=4$

[解答]

(1) $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{h}{h}=\lim_{h\to0}1=1$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$

(4) $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{4-4}{h}=\lim_{h\to0}0=0$

PART4 導関数の計算

4 関数 $f(x)=x^3-4x^2-3x+2$ を微分せよ。

また，$x=1$，$x=t$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

[解答]

$$f'(x)=(x^3)'-4(x^2)'-3(x)'+(2)'$$

$$=3x^2-4\cdot 2x-3\cdot 1+0$$

$$=3x^2-8x-3$$

$$f'(1)=3\cdot 1^2-8\cdot 1-3=-8$$

$$f'(t)=3t^2-8t-3$$

第17講　導関数の応用

PART1　接線の方程式

1　(1)　関数 $y=x^2-2x$ のグラフ上の点 $(-1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=-x^2+5x-6$ 上に x 座標が1である点Aをとる。点Aにおける接線の方程式を求めよ。

[解答]

(1)　$f(x)=x^2-2x$ とおくと，$f'(x)=2x-2$

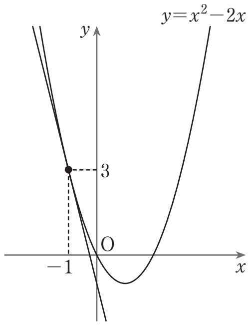
よって，点 $(-1,\ 3)$ における接線の傾きは

$$f'(-1)=2\cdot(-1)-2=-4$$

したがって，点 $(-1,\ 3)$ における接線の方程式は

$$y=-4\{x-(-1)\}+3=-4(x+1)+3$$

すなわち　$y=-4x-1$



(2)　$f(x)=-x^2+5x-6$ とおくと，$f'(x)=-2x+5$

点Aにおける接線の傾きは

$$f'(1)=-2\cdot1+5=3$$

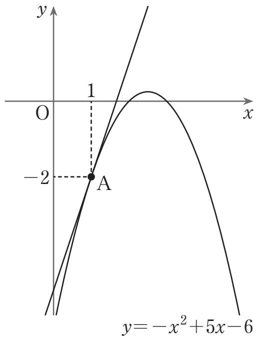
また，$f(1)=-1^2+5\cdot1-6=-2$ より，

点Aの座標は $(1,\ -2)$

したがって，点Aにおける接線の方程式は

$$y=3(x-1)-2$$

すなわち　$y=3x-5$



PART2 曲線上にない点から引いた接線

2 曲線 $y=-x^2-2x-3$ に，点 A$(0,\ 1)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

[解答]

$f(x)=-x^2-2x-3$ とおくと，$f'(x)=-2x-2$

接点の座標を $\left(a,\ -a^2-2a-3\right)$ とおくと，接線の傾きは　$f'(a)=-2a-2$

よって，点 $\left(a,\ -a^2-2a-3\right)$ における接線の方程式は

$$y=(-2a-2)(x-a)-a^2-2a-3$$

$$y=(-2a-2)x+(-2a-2)\cdot(-a)-a^2-2a-3$$

すなわち　$y=(-2a-2)x+a^2-3$ …… ①

この直線が，点 A$(0,\ 1)$ を通るので

$$1=(-2a-2)\cdot 0+a^2-3$$

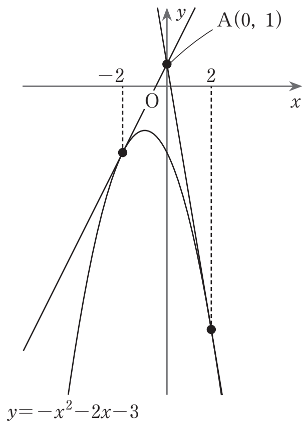
$$a^2=4$$

よって　$a=\pm 2$

①より

$a=-2$ のとき　$y=2x+1$

$a=2$ のとき　$y=-6x+1$



したがって，求める接線の方程式は

$y=2x+1$，$y=-6x+1$

PART3 関数の増減

3 次の関数の増減を調べ，増減表を作成せよ。

(1) $f(x)=x^3-3x^2$　　(2) $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x+2$

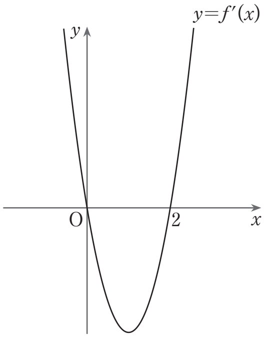
[解答]

(1) $f(x)=x^3-3x^2$ より　$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

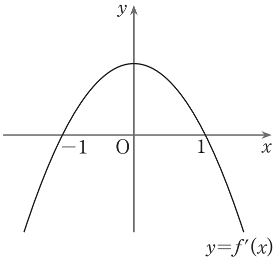


(2) $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x+2$ より　$f'(x)=-x^2+1=-(x^2-1)=-(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\dfrac{4}{3}$	↗	$\dfrac{8}{3}$	↘



PART4 関数の極大・極小

4 次の関数の増減を調べ，極値を求め，そのグラフをかけ。

(1) $f(x)=3x^3-9x^2+6$　　(2) $f(x)=-x^3+3x^2-3x+2$

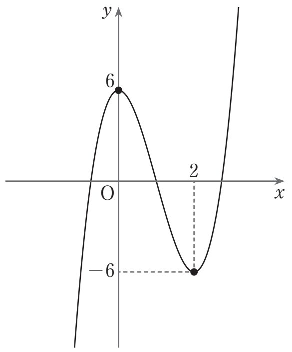
[解答]

(1) $f(x)=3x^3-9x^2+6$ より　$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-6	$\nearrow$
		極大		極小	



したがって

$x=0$ で極大値 6

$x=2$ で極小値 -6

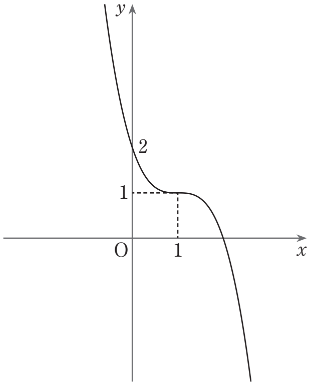
をとる。$y=f(x)$ のグラフは右図。

(2) $f(x)=-x^3+3x^2-3x+2$ より　$f'(x)=-3x^2+6x-3=-3\left(x^2-2x+1\right)=-3(x-1)^2$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$



したがって，$f(x)$ は常に減少し，極値をもたない。

$y=f(x)$ のグラフは右図。

PART5 関数の最大・最小

5 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x+1\quad\left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 5\right)$

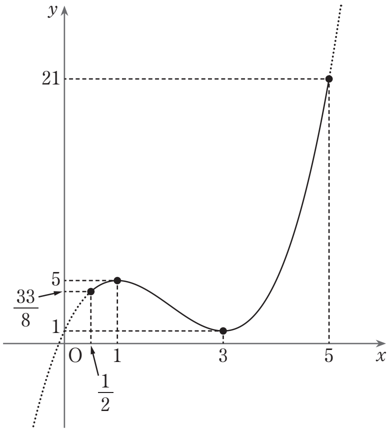
(2) $f(x)=-2x^3-6x^2+4\quad(-1\leqq x\leqq 1)$

[解答]

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ より　$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{33}{8}$	↗	5	↘	1	↗	21



したがって

$x=5$ で最大値 21

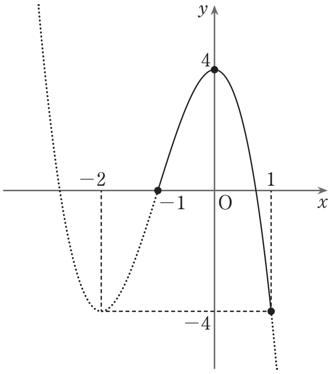
$x=3$ で最小値 1

をとる。

(2) $f(x)=-2x^3-6x^2+4$ より　$f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	-4



したがって

$x=0$ で最大値 4

$x=1$ で最小値 -4

をとる。

PART6 方程式への応用

6 次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $x^3-12x+12=0$

(2) $x^3+3x^2-4=0$

(3) $x^3+3x^2+3x+2=0$

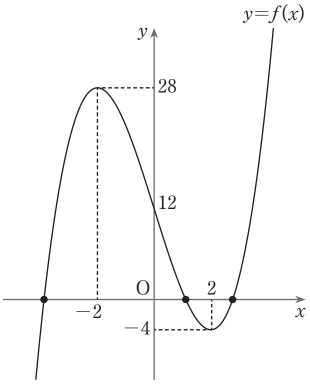
[解答]

(1) $f(x)=x^3-12x+12$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-4	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 3 個である。

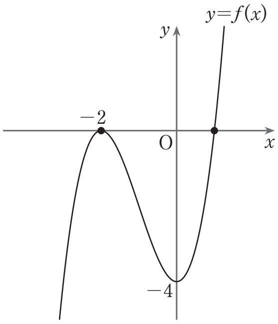
ゆえに，方程式 $x^3-12x+12=0$ の異なる実数解の個数は 3 個である。

(2) $f(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である。

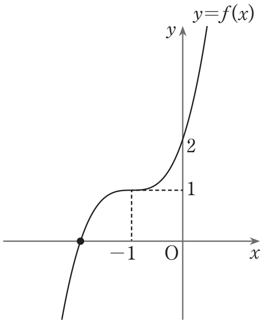
ゆえに，方程式 $x^3+3x^2-4=0$ の異なる実数解の個数は 2 個である。

(3) $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個である。

ゆえに，方程式 $x^3+3x^2+3x+2=0$ の異なる実数解の個数は 1 個である。

第 18 講　不定積分，定積分

PART1 不定積分

1 x^2 を微分すると $(x^2)' = 2x$ である。この式の両辺を 2 で割ることにより

$$\frac{1}{2}(x^2)' = x \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$$

であることがわかる。したがって

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

と表すことができる。

同様に，x^3，x をそれぞれ微分した結果を用いて，次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^2 dx$　　　(2) $\int 1 dx$

[解答]

(1) $(x^3)' = 3x^2$　より　$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$

よって　$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$　(C は積分定数)

(2) $(x)' = 1$　より　$\int 1 dx = x + C$　(C は積分定数)

PART2 x^n の不定積分，不定積分の性質

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(3x^2-4x+5)dx$　　(2) $\displaystyle\int(4t^2-1)dt$

[解答]

(1) $$\int(3x^2-4x+5)dx=3\int x^2dx-4\int xdx+5\int dx$$
$$=3\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2+5\cdot x+C=x^3-2x^2+5x+C$$ （C は積分定数）

(2) $$\int(4t^2-1)dt=4\int t^2dt-\int dt=4\cdot\frac{1}{3}t^3-t+C=\frac{4}{3}t^3-t+C$$ （C は積分定数）

PART3 定積分

3 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 (2x+3)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^1 (3x^2-18x-21)dx$

[解答]

(1) $\displaystyle\int_1^3 (2x+3)dx=\Big[x^2+3x\Big]_1^3$

$=(3^2+3\cdot3)-(1^2+3\cdot1)=18-4=14$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^1 (3x^2-18x-21)dx=\Big[x^3-9x^2-21x\Big]_{-2}^1$

$=(1^3-9\cdot1^2-21\cdot1)-\{(-2)^3-9\cdot(-2)^2-21\cdot(-2)\}$

$=(-29)-(-2)=-27$

PART4 定積分の性質

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^1 (3x^2-5x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^1 (3x^2-x+2)dx-\int_2^1 (3x^2-x+2)dx$

[解答]

(1) $\displaystyle\int_1^1 (3x^2-5x)dx=0$

(2)
$$\int_{-2}^1 (3x^2-x+2)dx-\int_2^1 (3x^2-x+2)dx$$
$$=\int_{-2}^1 (3x^2-x+2)dx+\int_1^2 (3x^2-x+2)dx$$
$$=\int_{-2}^2 (3x^2-x+2)dx$$
$$=3\int_{-2}^2 x^2\,dx-\int_{-2}^2 xdx+2\int_{-2}^2 dx$$
$$=3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^2+2\Big[x\Big]_{-2}^2$$
$$=\{2^3-(-2)^3\}-\frac{1}{2}\{2^2-(-2)^2\}+2\{2-(-2)\}$$
$$=(8+8)-\frac{1}{2}(4-4)+2(2+2)=16-0+8=24$$

第19講　定積分と面積

PART1　定積分と面積

1　次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2+1$，$x=-1$，$x=2$

(2)　$y=-x^2+2x-3$，$x=0$，$x=3$

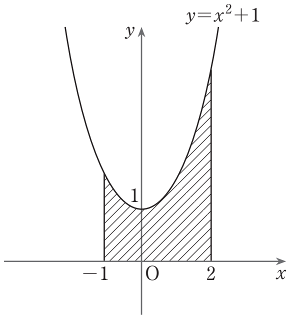
[解答]

(1)　区間 $-1\leqq x\leqq 2$ では　$y>0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=6$$



(2)　$y=-x^2+2x-3=-(x-1)^2-2$ より，

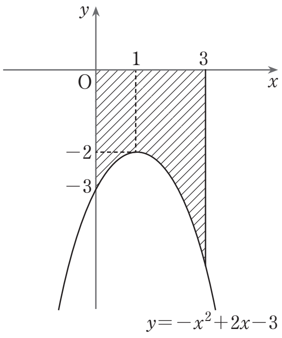
区間 $0\leqq x\leqq 3$ では $y<0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{0}^{3}\{-(-x^2+2x-3)\}dx$$

$$=\int_{0}^{3}(x^2-2x+3)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{0}^{3}=(9-9+9)-(0-0+0)=9$$



PART2 2 つの曲線の間の面積

2 (1) 放物線 $y=x^2-x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 放物線 $y=-x^2+4x+2$ と直線 $y=2x-1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

[解答]

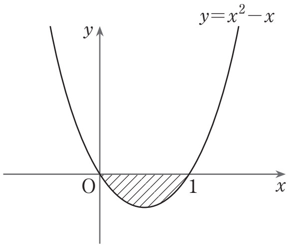
(1) 放物線 $y=x^2-x$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-x=0$$

の解である。これを解くと

$$x(x-1)=0 \quad より \quad x=0,\ 1$$

よって，求める面積は



$$\int_0^1\{-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-(0+0)=\frac{1}{6}$$

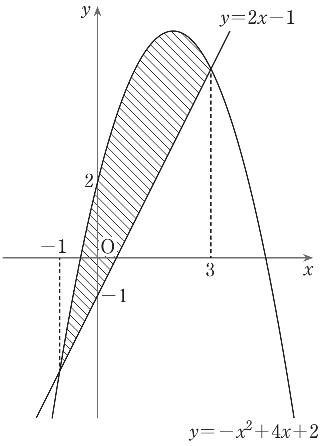
(2) 放物線 $y=-x^2+4x+2$ と直線 $y=2x-1$ の交点の x 座標は，方程式

$$-x^2+4x+2=2x-1$$

の解である。これを解くと

$$x^2-2x-3=0 \qquad (x+1)(x-3)=0 \quad より \quad x=-1,\ 3$$

よって，求める面積は



$$\int_{-1}^3\{(-x^2+4x+2)-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^3=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}$$

確認問題　解答

第 1 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：12，ウエ：48，オカ：64

[解説]

$(x-4)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2-4^3$ [A]

$=\boldsymbol{x^3-12x^2+48x-64}$

[A]
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

2 **[正解]** キク：27，ケコ：27，サ：9

[解説]

$(3a+b)^3=(3a)^3+3\cdot(3a)^2\cdot b+3\cdot 3a\cdot b^2+b^3$ [B]

$=\boldsymbol{27a^3+27a^2b+9ab^2+b^3}$

[B]
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

3 **[正解]** シ：①

[解説]

$(x+5)(x^2-5x+25)=(x+5)(x^2-x\cdot 5+5^2)$

$=x^3+5^3$ [C]

$=\boldsymbol{x^3+125}$

[C]
$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

4 **[正解]** ス：③

[解説]

$(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

$=(a-2b)\{a^2+a\cdot 2b+(2b)^2\}$

$=a^3-(2b)^3$ [D]

$=\boldsymbol{a^3-8b^3}$

[D]
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

5 [正解] セ：4，ソ：4，タチ：16

[解説]

$$x^3-64=x^3-4^3$$
$$=(x-4)(x^2+x\cdot4+4^2)\quad\text{[E]}$$
$$=\boldsymbol{(x-4)(x^2+4x+16)}$$

[E]
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

6 [正解] ツ：3，テ：2，ト：6，ナ：4

[解説]

$$27a^3+8b^3=(3a)^3+(2b)^3$$
$$=(3a+2b)\{(3a)^2-3a\cdot2b+(2b)^2\}\quad\text{[F]}$$
$$=\boldsymbol{(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)}$$

[F]
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

第 1 講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：10，ウエ：40，オカ：80，キク：80

[解説]

二項定理より

$$(x+2)^5$$
$$={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4\cdot2+{}_5C_2x^3\cdot2^2$$
$$+{}_5C_3x^2\cdot2^3+{}_5C_4x\cdot2^4+{}_5C_52^5 \quad \text{[A]}$$
$$=1\cdot x^5+5\cdot x^4\cdot2+\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot x^3\cdot4$$
$$+\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot x^2\cdot8+5\cdot x\cdot16+1\cdot32$$
$$=\boldsymbol{x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32}$$

[A]　二項定理
$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_nC_nb^n$

2 **[正解]** ケコサシ：1620

[解説]

$(4x-3y)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_r(4x)^{5-r}(-3y)^r \quad \text{[B]}$$
$$={}_5C_r\cdot4^{5-r}\cdot(-3)^rx^{5-r}y^r$$

xy^4 は $r=4$ のときの項である。

よって，求める係数は

$${}_5C_4\cdot4\cdot(-3)^4=5\cdot4\cdot81=\mathbf{1620}$$

[B]　$(a+b)^n$ の展開式の一般項は，${}_nC_ra^{n-r}b^r$

第 1 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：1，ウ：3

[解説]

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x \ +1 \\ \cline{2-2}
x+4 \,\big)\!\! & 2x^2+9x+7 \\
 & 2x^2+8x \\ \cline{2-2}
 & x+7 \\
 & \underline{x+4} \\
 & 3
\end{array}
$$

[A]

商　$\boldsymbol{2x+1}$

余り　**3**

［A］　多項式 A を多項式 B で割った商を Q，余りを R とすると

$A=BQ+R$

（R は 0 か，B より低い次数）

を満たす多項式 Q，R がただ 1 つに定まる。

2

[正解] エ：2，オ：6，カキ：22

[解説]

$$
\begin{array}{rr}
 & x^2+2x\ \ +6 \\ \cline{2-2}
x-3 \,\big)\!\! & x^3-\ x^2\qquad\ +\ 4 \\
 & x^3-3x^2\qquad\qquad\ \ \\ \cline{2-2}
 & 2x^2\qquad\quad\ \ \ \\
 & 2x^2-6x\qquad \\ \cline{2-2}
 & 6x+\ 4 \\
 & \underline{6x-18} \\
 & 22
\end{array}
$$

[B]

商　$\boldsymbol{x^2+2x+6}$

余り　**22**

［B］　多項式 A を多項式 B で割る計算の手順

① A，B を，それぞれ降べきの順に並べる。

② 割られる式 A に「欠けている次数の項」があれば，その部分をあけておく。

③ 余りが 0 になるか，余りの次数が割る式 B の次数より低くなるまで割り算を行う。

第 1 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

$$\frac{x^2+2x}{x^2-4}=\frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} \quad \text{[A]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{x}{x-2}}$$

[A]　分母，分子を「因数分解」できないか確かめる。
それにより共通因数を見つけ，約分を行う。

2

[正解] イ：4，ウ：3

[解説]

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-5x+6}=\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x-3)} \quad \text{[B]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{x+4}{x-3}}$$

[B]　分数式は，それ以上約分できない形（既約分数式）にする。

3

[正解] エ：3

[解説]

$$\frac{x^2+x}{x^2+x-6}\div\frac{x+1}{x-2}=\frac{x^2+x}{x^2+x-6}\times\frac{x-2}{x+1} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{x(x+1)}{(x-2)(x+3)}\times\frac{x-2}{x+1} \quad \text{[D]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{x}{x+3}}$$

[C]　分数式の除法

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

[D]　それぞれの分数の分母，分子を「因数分解」できないか確かめる。
それにより共通因数を見つけ，約分を行う。

4 [正解] オ：4，カ：1，キ：3

[解説]

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{3}{x^2+3x}$$ [E]

$$=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{3}{x(x+3)}$$

$$=\frac{x+3}{x(x-1)(x+3)}+\frac{3(x-1)}{x(x-1)(x+3)}$$ [F]

$$=\frac{(x+3)+3(x-1)}{x(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)(x+3)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{(x-1)(x+3)}}$$

[E]　それぞれの分数の分母，分子を「因数分解」できないか確かめる。
それにより共通因数を見つけ，約分や通分を行う。

[F]　分数式の加法
$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$$

第 2 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2，ウエ：-3

[解説]

等式の右辺を x について整理すると

$$(\text{右辺})=a(x+1)^2+b(x+1)+c$$
$$=ax^2+2ax+a+bx+b+c$$
$$=ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$$

これより

$$3x^2+8x+2=ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$$

これが x についての恒等式であるとき

$3=a$，$8=2a+b$，$2=a+b+c$ [A]

これを解くと

$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=2}$，$\boldsymbol{c=-3}$

[A]　恒等式の性質
$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が
x についての恒等式
$\iff a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

第 2 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：4，イ：2，ウ：8，エオ：16，カキ：16

[解説]

(右辺) $= x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 2x^3 - 4x^2 - 8x - 16$

$= x^4 - 16 =$ (左辺)　[A]

よって　$x^4 - 16 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$

[A]　等式 $A=B$ の証明
A を変形して B を導く，または
B を変形して A を導く。

2　**[正解]** ク：2，ケ：2，コ：2，サ：4，シ：2

[解説]

$a - b + 2c = 0$ より

$a = b - 2c$　[B]

このとき

(左辺) $= b^2 - 2(b-2c)c$　[C]

$= b^2 - 2bc + 4c^2$

(右辺) $= 4c^2 + (b-2c)b$

$= 4c^2 + b^2 - 2bc$

$= b^2 - 2bc + 4c^2$

よって　$b^2 - 2ac = 4c^2 + ab$

[B]　条件つきの等式の証明では，
条件式を用いて文字を減らして進める。

[C]　等式 $A=B$ の証明
A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C
を導く。

3 [正解] ス：②，セ：④，ソ：②，タ：④，チ：⑤，ツ：②，テ：④，ト：⑤

[解説]

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと [D]

$$a=\boldsymbol{bk},\quad c=\boldsymbol{dk}$$

このとき

$$(\text{左辺})=\frac{\boldsymbol{bk}-\boldsymbol{dk}}{b-d}$$ [E]

$$=\frac{k(b-d)}{b-d}=\boldsymbol{k}$$

$$(\text{右辺})=\frac{\boldsymbol{bk}+2\boldsymbol{dk}}{b+2d}$$

$$=\frac{\boldsymbol{k}(b+2d)}{b+2d}=k$$

よって　$\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a+2c}{b+2d}$

[D]　条件式が比例式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ などと与えられている場合は，
（比例式）$=k$
とおくとよい。

[E]　等式 $A=B$ の証明
A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。

第 2 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：1，エ：2

[解説]

$$(ab+2)-(2a+b)=ab+2-2a-b \quad \text{[A]}$$
$$=(a-1)b-2(a-1)$$
$$=(a-1)(b-2)$$

$a>1$，$b>2$ より $a-1>0$，$b-2>0$

よって

$$(a-1)(b-2)>0 \quad \text{[B]}$$

したがって，$(ab+2)-(2a+b)>0$ より

$$ab+2>2a+b$$

[A]　不等式 $A>B$ の証明
$A-B>0$ が成り立つことを示す。

[B]　正であることを示すのに用いられた性質
(正)×(正)＝(正)

2

[正解] オ：5，カ：0，キ：5，ク：5

[解説]

$$(x^2+25y^2)-10xy=x^2-10xy+25y^2$$
$$=(x-5y)^2 \geqq 0 \quad \text{[C]}$$

よって

$$x^2+25y^2 \geqq 10xy$$

等号が成り立つのは

$$x-5y=0$$

つまり $x=5y$ のときである。

[C]　実数の平方の性質
実数 a について
$a^2 \geqq 0$ （等号成立は $a=0$ のとき）

第 2 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：4，イ：4，ウ：4，エ：0

[解説]

両辺の平方の差を考えると　**[A]**

$$(\sqrt{a}+2)^2-(\sqrt{a+4})^2$$
$$=(a+4\sqrt{a}+4)-(a+4)$$
$$=4\sqrt{a}$$

$a>0$ であるから

$$4\sqrt{a}>0$$

よって

$$(\sqrt{a}+2)^2>(\sqrt{a+4})^2$$

$\sqrt{a}+2>0$，$\sqrt{a+4}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+2>\sqrt{a+4}$$

[A]　不等式 $A>B$ の証明
$A>0$，$B>0$ ならば，
$A^2-B^2>0$ であることを示してもよい。

第 2 講　PART5 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：2，ウ：2，エ：4，オ：2

[解説]

$\dfrac{x}{2}>0$，$\dfrac{2}{x}>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqq 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}}$$ [A]

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqq 2\cdot 1$$

よって　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\geqq \mathbf{2}$

等号が成り立つのは

$$\frac{x}{2}=\frac{\mathbf{2}}{x}$$

つまり

$$x^2=\mathbf{4}$$

のときで，$x>0$ より $x=\mathbf{2}$ のときである。

> [A]　相加平均と相乗平均の大小関係
> $a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$
> （等号成立は $a=b$ のとき）

第 3 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：2

[解説]

$$(4+3i)-(2+5i)=(4-2)+(3-5)i \quad \text{[A]}$$
$$=\mathbf{2-2}\boldsymbol{i}$$

[A]　実部，虚部それぞれについて和や差を求める。

2

[正解] ウ：2

[解説]

$$1+i-i^2+i^3=1+i-i^2+i^2\cdot i \quad \text{[B]}$$
$$=1+i+1-i$$
$$=\mathbf{2}$$

[B]　$i^2=-1$

3

[正解] エオ：15，カ：5

[解説]

$$(3-i)(4+3i)=12+9i-4i-3i^2 \quad \text{[C] [D]}$$
$$=12+9i-4i+3$$
$$=\mathbf{15+5}\boldsymbol{i}$$

[C]　虚数単位 i を文字のように扱って計算する。

[D]　$i^2=-1$

4

[正解] キ：1，ク：2

[解説]

$$\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \quad \text{[E]}$$
$$=\frac{5(1-2i)}{1-4i^2} \quad \text{[F]}$$
$$=\frac{5(1-2i)}{5}$$
$$=\mathbf{1-2}\boldsymbol{i}$$

[E]　分母と共役な複素数を分母と分子に掛け，分母を実数にする。

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2$$
$$=a^2+b^2$$

[F]　$i^2=-1$

5 [正解] ケ：1，コ：5，サ：3，シ：5

[解説]

$$\frac{2i}{3-i}=\frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)} \quad \text{[G]}$$

$$=\frac{2i(3+i)}{9-i^2} \quad \text{[H]}$$

$$=\frac{2i(3+i)}{10}$$

$$=\frac{i(3+i)}{5}$$

$$=\frac{3i+i^2}{5} \quad \text{[H]}$$

$$=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

[G]　分母と共役な複素数を分母と分子に掛け，分母を実数にする。

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2$$
$$=a^2+b^2$$

[H]　$i^2=-1$

第 3 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{3}\,i \quad \text{[A]}$$
$$=\sqrt{6}\,i^2 \quad \text{[B]}$$
$$=-\sqrt{6}$$

[A]　$a>0$ のとき
$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

[B]　$i^2=-1$

2

[正解] イ：④

[解説]

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i} \quad \text{[C]}$$
$$=\frac{2}{i}$$
$$=\frac{2i}{i^2} \quad \text{[D]}$$
$$=-2i$$

[C]　$a>0$ のとき
$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

[D]　分母，分子に i を掛ける。

3

[正解] ウ：③

[解説]

$$x^2=-4$$
$$x=\pm\sqrt{-4} \quad \text{[E]}$$
$$=\pm\sqrt{4}\,i$$
$$=\pm 2i$$

[E]　$x^2=k$（k は実数）の解は，k の符号に関わらず
$x=\pm\sqrt{k}$

4

[正解] エ：3，オ：5，カ：2

[解説]

$2x^2-6x+7=0$ の解は，解の公式より

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot7}}{2\cdot2}$$ [F]

$$=\frac{6\pm\sqrt{-20}}{4}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{20}\,i}{4}=\frac{6\pm2\sqrt{5}\,i}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{5}\,i}{2}}$$

> [F]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は
>
> $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

（別解）

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot7}}{2}$$ [G]

$$=\frac{3\pm\sqrt{-5}}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{5}\,i}{2}}$$

> [G]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は
>
> $$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

第 3 講　PART3 確認問題 解答

1 [正解] ア：①

[解説]

2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=5^2-4\cdot2\cdot1=25-8 \quad \text{[A]}$$
$$=17>0$$

よって，**異なる 2 つの実数解をもつ。** [B]

[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式
$D=b^2-4ac$

[B]
$D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ

2 [正解] イ：③

[解説]

2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot6=9-24$$
$$=-15<0$$

よって，**異なる 2 つの虚数解をもつ。** [C]

[C]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について
$D<0 \iff$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

3 [正解] ウ：②

[解説]

2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-4\cdot1=4-4$$
$$=0$$

よって，**重解をもつ。** [D]

[D]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について
$D=0 \iff$ 重解をもつ

4 **[正解]** エオ：-6，カ：2

[解説]

この 2 次方程式の判別式を D とすると，虚数解をもつための条件は $D<0$ [E]

$$D=a^2-4\cdot1\cdot(-a+3)$$
$$=a^2+4a-12$$
$$=(a-2)(a+6)$$

よって

$$(a-2)(a+6)<0$$

求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-6<a<2}$$

[E]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると
虚数解をもつ $\Longleftrightarrow$ $D<0$

第 3 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：5，エ：2

[解説]

$2x^2-3x+5=0$ において，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2} \quad \text{[A]}$$

$$\alpha\beta=\frac{5}{2}$$

[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

2

[正解] オ：6

[解説]

$x^2+2x-1=0$ において，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2,\quad \alpha\beta=-1$$

よって

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \quad \text{[B]}$$
$$=(-2)^2-2\cdot(-1)$$
$$=4+2=6$$

[B]　$\alpha^2+\beta^2$ を $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を用いて表す。

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ より

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

3

[正解] カ：8

[解説]

$x^2+x+3=0$ において，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-1,\quad \alpha\beta=3$$

よって

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \quad \text{[C]}$$
$$=(-1)^3-3\cdot3\cdot(-1)$$
$$=8$$

[C]　$\alpha^3+\beta^3$ を $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を用いて表す。

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ より

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

4 **[正解]** キ：3，ク：2，ケ：7

[解説]

2 次方程式 $3x^2-4x-1=0$ の解は

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot(-1)}}{3}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$$

よって

$$3x^2-4x-1$$

$$=3\left(\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{3}}\right)\left(\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{3}}\right)$$ [D]

[D]　2 次式の因数分解
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

5 **[正解]** コ：4，サ：5

[解説]

2 数 $2+i$，$2-i$ の

和は　$(2+i)+(2-i)=4$

積は　$(2+i)(2-i)=4-i^2=4+1=5$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-4x+5=0}$$ [E]

[E]　2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

第 4 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1

[解説]

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは

$$P(1)=1^3+2\cdot1^2-3\cdot1+1 \quad \text{[A]}$$
$$=1+2-3+1$$
$$=\mathbf{1}$$

[A]　剰余の定理
多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは　$P(k)$

2

[正解] イ：7

[解説]

$P(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りは

$$P(-2)$$
$$=(-2)^3+2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+1 \quad \text{[B]}$$
$$=-8+8+6+1$$
$$=\mathbf{7}$$

[B]　剰余の定理
多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは　$P(k)$

3

[正解] ウ：1，エ：8

[解説]

$P(x)$ を $2x-1$ で割ったときの余りは

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+1 \quad \text{[C]}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

[C]　剰余の定理
多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは　$P\left(-\frac{b}{a}\right)$

第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：3

[解説]

$P(x)=2x^3-5x^2-x+6$ とおくと

$$P(-1)=2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-(-1)+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。[A] [B]

$P(x)$ を $x+1$ で割ると次のようになる。[B]

$$\begin{array}{r}
2x^2-7x\ \ +6 \\
x+1\,\overline{)\,2x^3-5x^2-\ \ x+6} \\
\underline{2x^3+2x^2\qquad\qquad} \\
-7x^2-\ \ x\quad \\
\underline{-7x^2-7x\quad} \\
6x+6 \\
\underline{6x+6} \\
0
\end{array}$$

商は $2x^2-7x+6$ であるから

$$2x^3-5x^2-x+6=(x+1)(2x^2-7x+6)$$ [B]

$$=\boldsymbol{(x+1)(x-2)(2x-3)}$$

[A]　因数定理
　多項式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ
$\Longleftrightarrow$ $P(k)=0$

[B]　因数定理を用いて，多項式 $P(x)$ を因数分解する手順

① $P(k)=0$ となる k を見つける。
　k の値の候補は
$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$
　である。

② $P(x)\div(x-k)$ を計算する。その商を $Q(x)$ とすると
$$P(x)=(x-k)Q(x)$$
　と表される。

③ $Q(x)$ を因数分解する。

第 4 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2，ウ：4，エ：3，オ：2，カ：4

[解説]

$P(x)=x^3-x^2-2x-12$ とおくと

$$P(3)=3^3-3^2-2\cdot3-12$$
$$=27-9-6-12=0$$

よって，$P(x)$ は $x-3$ を因数にもつ。[A]

組立除法により，$P(x)$ を $x-3$ で割ると，次のようになる。

1	−1	−2	−12	3
	3	6	12	
1	2	4	0	

[A]

商は x^2+2x+4，余りは 0 であるから

$$P(x)=(\boldsymbol{x-3})(\boldsymbol{x^2+2x+4})$$ [A]

[A]　組立除法を用いた因数分解

① $P(x)$ を $x-k$ で割ったときの商 $Q(x)$ と余り R を組立除法で求める。
k の値の候補は
$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$
である。

② ①において $R=0$ のとき $P(x)=(x-k)Q(x)$ と表される。

③ $Q(x)$ を因数分解する。

第 4 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-1，ウ：1，エ：3

[解説]

$$x^3+1=0$$

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$ [A]

よって，$x+1=0$ または $x^2-x+1=0$

$x+1=0$ より，$x=-1$

$x^2-x+1=0$ より

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$ [B]

したがって

$$\boldsymbol{x=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$$

[A]　因数分解を行う。
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

[B]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2

[正解] オ：1，カ：2

[解説]

$x^2=t$ とおくと，与えられた方程式は [C]

$$t^2+3t-4=0$$

$$(t-1)(t+4)=0$$

つまり

$$(x^2-1)(x^2+4)=0$$

よって，$x^2-1=0$ または $x^2+4=0$

$x^2-1=0$ より，$x^2=1$

$$x=\pm 1$$

$x^2+4=0$ より，$x^2=-4$

$$x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$$

したがって

$$\boldsymbol{x=\pm 1,\ \pm 2i}$$

[C]　複 2 次式の因数分解は，$x^2=t$ とおくと，2 次式の因数分解に帰着する。

3 **[正解]** キ：2，ク：1，ケ：2

[解説]

$P(x)=x^3-4x^2+3x+2$ とおくと

$$P(2)=2^3-4\cdot 2^2+3\cdot 2+2=0$$ [D]

より，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-2$ で割ると次のようになる。

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x-1 \\ \hline x-2 & x^3-4x^2+3x+2 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & \quad -2x^2+3x \\ & \quad -2x^2+4x \\ \hline & \qquad\quad -x+2 \\ & \qquad\quad -x+2 \\ \hline & \qquad\qquad\ \ 0 \end{array}$$

よって

$$P(x)=(x-2)(x^2-2x-1)$$

$P(x)=0$ より

$$x-2=0 \text{ または } x^2-2x-1=0$$

$x-2=0$ より，$x=2$

$x^2-2x-1=0$ より

$$x=1\pm\sqrt{2}$$

したがって

$$\boldsymbol{x=2,\ 1\pm\sqrt{2}}$$

[D]　因数分解の公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を 1 次式または 2 次式の積の形に因数分解する。

4 [正解] コ：1，サシ：−5

[解説]

$P(x)=x^3+3x^2-9x+5$ とおくと

$$P(1)=1^3+3\cdot1^2-9\cdot1+5=0$$ [E]

より，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-1$ で割ると次のようになる。

$$\begin{array}{r|l} & x^2+4x-5 \\ \hline x-1 & x^3+3x^2-9x+5 \\ & x^3-\ x^2 \\ \hline & \quad 4x^2-9x \\ & \quad 4x^2-4x \\ \hline & \qquad -5x+5 \\ & \qquad -5x+5 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} P(x)&=(x-1)(x^2+4x-5) \\ &=(x-1)(x-1)(x+5) \\ &=(x-1)^2(x+5) \end{aligned}$$

$P(x)=0$ より

$x=1$，-5 [F]

[E]　因数分解の公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を 1 次式または 2 次式の積の形に因数分解する。

[F]　$x=1$ が重解となり，2 個の解と考える。$P(x)=0$ は 3 次方程式なので，3 個の解をもつ。
一般に，複素数の範囲において，n 次方程式は n 個の解をもつ。

第 5 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：4

[解説]

線分 AB を 3：1 に内分する点の座標は

$$\frac{1\cdot(-2)+3\cdot 6}{3+1}=\frac{16}{4}=4$$ [A]

[A]　数直線上の 2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m：n$ に内分する点の座標は

$$\frac{na+mb}{m+n}$$

2

[正解] イ：2

[解説]

線分 AB の中点の座標は

$$\frac{1\cdot(-2)+1\cdot 6}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$ [B]

[B]　数直線上の 2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB の中点の座標は

$$\frac{1\cdot a+1\cdot b}{1+1}=\frac{a+b}{2}$$

3

[正解] ウエ：14

[解説]

線分 AB を 2：1 に外分する点の座標は

$$\frac{-1\cdot(-2)+2\cdot 6}{2-1}=\frac{14}{1}=14$$ [C]

[C]　数直線上の 2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m：n$ に外分する点の座標は

$$\frac{-na+mb}{m-n}\quad (m\neq n)$$

4

[正解] オカ：-6

[解説]

線分 AB を 1：3 に外分する点の座標は

$$\frac{-3\cdot(-2)+1\cdot 6}{1-3}=\frac{12}{-2}=-6$$ [D]

[D]　数直線上の 2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m：n$ に外分する点の座標は

$$\frac{-na+mb}{m-n}\quad (m\neq n)$$

第 5 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イウ：10

[解説]

2 点 A(0, 5)，B(6, 3) 間の距離は

$$AB=\sqrt{(6-0)^2+(3-5)^2} \quad \text{[A]}$$

$$=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{40}=\mathbf{2\sqrt{10}}$$

[A]　2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 間の距離は
$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2

[正解] エ：2，オカ：13，キ：3

[解説]

線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot0+1\cdot6}{1+2},\ \frac{2\cdot5+1\cdot3}{1+2}\right) \quad \text{[B]}$$

これより $\left(\mathbf{2},\ \mathbf{\frac{13}{3}}\right)$

[B]　2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は
$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

3

[正解] ク：9，ケ：2

[解説]

線分 AB を 3：1 に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-1\cdot0+3\cdot6}{3-1},\ \frac{-1\cdot5+3\cdot3}{3-1}\right) \quad \text{[C]}$$

これより　**(9，2)**

[C]　2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 AB を $m:n$（ただし，$m \neq n$）に外分する点の座標は
$\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

4

[正解] コ：3，サ：5

[解説]

△ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{0+6+3}{3},\ \frac{5+3+7}{3}\right) \quad \text{[D]}$$

これより　**(3，5)**

[D]　3 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標は
$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

第 5 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：1

[解説]

点 (1，3) を通り，傾きが 2 の直線の方程式は

$y-3=2(x-1)$ [A]

$y=2(x-1)+3$

よって　$\boldsymbol{y=2x+1}$

[A]　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m である直線の方程式は
$y-y_1=m(x-x_1)$

2

[正解] ウ：②

[解説]

点 (2，5) を通り，x 軸に平行な直線は，傾きが 0 であるから [B]

$y-5=0\cdot(x-2)$

よって　$\boldsymbol{y=5}$

[B]　x 軸に平行な直線の傾きは 0 である。

3

[正解] エ：3，オ：5

[解説]

2 点 (1，2)，(3，−4) を通る直線の方程式は

$y-2=\dfrac{-4-2}{3-1}(x-1)$ [C]

$y=-3(x-1)+2$

よって　$\boldsymbol{y=-3x+5}$

[C]　異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は，$x_1 \neq x_2$ のとき
$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

4

[正解] カ：③

[解説]

2 点 (3，1)，(3，7) を通る直線の方程式は，2 点の x 座標がともに 3 であるから

$\boldsymbol{x=3}$ [D]

[D]　異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は，$x_1=x_2$ のとき
$x=x_1$

第 5 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

直線 $2x+y-1=0$ の傾きは -2 より，この直線と平行である直線 l の傾きは -2 である。[A]

直線 l は点 $(2,\ 3)$ を通るから，その方程式は

$$y-3=-2(x-2)$$

$$y=-2(x-2)+3$$

よって　$\boldsymbol{y=-2x+7}$

[A]　2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ について
　2 直線が平行　$\Longleftrightarrow$　$m_1=m_2$

2

[正解] イ：③

[解説]

直線 $2x+y-1=0$ の傾きは -2 である。

この直線と垂直である直線 l の傾きを m とすると

$$(-2)\cdot m=-1$$ [B]

これより　$m=\dfrac{1}{2}$

直線 l は点 $(2,\ 3)$ を通るから，その方程式は

$$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y=\frac{1}{2}(x-2)+3$$

よって　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+2}$

[B]　2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ について
　2 直線が垂直　$\Longleftrightarrow$　$m_1m_2=-1$

第 5 講　PART5 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

原点 $(0,\ 0)$ と直線 $4x+3y-10=0$ の距離は

$$\frac{|4\cdot0+3\cdot0-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{25}} \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{10}{5}=2$$

[A]　点と直線の距離
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2

[正解] イ：2，ウ：5

[解説]

点 $(3,\ 1)$ と直線 $x+2y+5=0$ の距離は

$$\frac{|1\cdot3+2\cdot1+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|10|}{\sqrt{5}} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

[B]　点と直線の距離
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：4，ウ：9

[解説]

中心が点 (2，4) で，半径が 3 の円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-4)^2=3^2 \quad \text{[A]}$$

すなわち

$$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-4)^2=9}$$

[A]　点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$（標準形）

2 **[正解]** エオ：10

[解説]

半径 r は中心 (0，0) と点 (3，−1) の距離であるから

$$r^2=3^2+(-1)^2=10$$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2=10} \quad \text{[B]}$$

[B]　原点を中心とする半径 r の円の方程式は
$x^2+y^2=r^2$

3 [正解] カ：4，キ：4，ク：3

[解説]

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

[C]

この円が3点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 4)$，$(3,\ 0)$ を通るので

$$\begin{cases} 0^2+1^2+m+n=0 \\ 1^2+4^2+l+4m+n=0 \\ 3^2+0^2+3l+n=0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} m+n=-1 & \cdots\cdots① \\ l+4m+n=-17 & \cdots\cdots② \\ 3l+n=-9 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②－①より　$l+3m=-16$　……④

③－②より　$2l-4m=8$

すなわち　$l-2m=4$　……⑤

④，⑤より　$l=-4$，$m=-4$

このとき，①より　$n=3$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2-4x-4y+3=0}$$

> [C]　中心の座標や半径の情報がない場合は
> $x^2+y^2+lx+my+n=0$（一般形）
> を用いる。

4 [正解] ケ：3，コ：2，サ：2

[解説]

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$ を変形すると [D]

$$(x-3)^2-9+(y-2)^2-4+9=0$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$ [D]

よって，この方程式は点 $(3,\ 2)$ を中心とする半径 **2** の円を表す。

> [D]　x，y それぞれについて平方完成し
> $(x-a)^2+(y-b)^2=k$
> の形に変形する。
> $k>0$ ならば　中心 $(a,\ b)$，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

第 6 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①

[解説]

円と直線の方程式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots① \\ y=x-2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおき，②を①に代入して整理すると

$$x^2+(x-2)^2=10$$ [A]

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0$$

$$x=-1,\ 3$$

②より

$x=-1$ のとき　$y=-3$

$x=3$ のとき　$y=1$

よって，**共有点の個数は 2 個**

その座標は $(-1,\ -3)$，$(3,\ 1)$

[A]　共有点の座標は，円の方程式と直線の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

2 [正解] イ：④

[解説]

円と直線の方程式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 & \cdots\cdots① \\ y=-2x+10 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおき，②を①に代入して整理すると

$$x^2+(-2x+10)^2=20 \quad \text{[B]}$$

$$x^2-8x+16=0$$

$$(x-4)^2=0$$

$$x=4$$

このとき②より $y=2$

よって，**共有点の個数は 1 個**

その座標は (4，2)

[B]　共有点の座標は，円の方程式と直線の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

3 [正解] ウ：⑤

[解説]

円と直線の方程式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 & \cdots\cdots① \\ y=-x+3 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおき，②を①に代入して整理すると

$$x^2+(-x+3)^2=4$$

$$2x^2-6x+5=0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-2\cdot5=-1<0 \quad \text{[C]}$$

よって，**共有点の個数は 0 個**

[C]　円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とすると

$D>0 \iff$ 円と直線の共有点は 2 個

$D=0 \iff$ 円と直線の共有点は 1 個

$D<0 \iff$ 円と直線の共有点は 0 個

第6講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：5，イウ：−5

[解説]

円と直線の方程式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ① \\ y=-2x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

とおき，②を①に代入して整理すると

$$x^2+(-2x+k)^2=5$$

$$5x^2-4kx+k^2-5=0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5\cdot\left(k^2-5\right)=-k^2+25$$

円と直線が接するのは $D=0$ のときであるから [A]

$$-k^2+25=0$$

$$k^2=25$$

よって　$\boldsymbol{k=\pm 5}$

(別解)

円 $x^2+y^2=5$ の中心は原点 $(0,\ 0)$，半径は $r=\sqrt{5}$

点 $(0,\ 0)$ と直線 $2x+y-k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|2\cdot 0+1\cdot 0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$ [B]

$$=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

円と直線が接するのは $d=r$ のときであるから [C]

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$|k|=5$$

よって　$\boldsymbol{k=\pm 5}$

[A]　円の方程式と直線の方程式から，1つの文字を消去して得られる2次方程式の判別式を D とすると
　$D=0 \iff$ 円と直線が接する

[B]　点と直線の距離
　点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

[C]　円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とすると
　$d=r \iff$ 円と直線が接する

2 [正解] エオ：-2，カ：2

[解説]

円と直線の方程式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots\cdots① \\ y=x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおき，②を①に代入して整理すると

$$x^2+(x+k)^2=2$$

$$2x^2+2kx+k^2-2=0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-2\cdot\left(k^2-2\right)=-k^2+4$$

円と直線が共有点をもたないのは $D<0$ のときであるから [D]

$$-k^2+4<0$$

$$k^2-4>0$$

$$(k+2)(k-2)>0$$

よって　$\boldsymbol{k<-2,\ 2<k}$

（別解）

円 $x^2+y^2=2$ の中心は原点 $(0,\ 0)$，半径は $r=\sqrt{2}$

点 $(0,\ 0)$ と直線 $x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1\cdot0-1\cdot0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$ [E]

$$=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

円と直線が共有点をもたないのは $d>r$ のときであるから [F]

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$$

$$|k|>2$$

よって　$\boldsymbol{k<-2,\ 2<k}$

[D]　円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とすると

$D<0 \iff$ 円と直線が共有点をもたない

[E]　点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[F]　円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とすると

$d>r \iff$ 円と直線が共有点をもたない

第 6 講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イウ：10

[解説]

円 $x^2+y^2=10$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式は

$$1\cdot x+3\cdot y=10 \quad \text{[A]}$$

すなわち　$\boldsymbol{x+3y=10}$

[A]　円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は
$x_1x+y_1y=r^2$

2

[正解] エ：2，オ：5，カ：2，キ：5，ク：1，

ケコ：−2，サ：2，シ：1

[解説]

接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると，点 P における接線の方程式は

$x_1x+y_1y=5$ ……① [B] [C]

この直線が点 $\mathrm{A}(3,\ -1)$ を通るので

$3x_1-y_1=5$ ……② [C]

また，点 P は円上の点であるから

$x_1^2+y_1^2=5$ ……③ [C]

②より　$y_1=3x_1-5$ ……④

これを③に代入すると

$x_1^2+(3x_1-5)^2=5$

$10x_1^2-30x_1+20=0$

$x_1^2-3x_1+2=0$

$(x_1-1)(x_1-2)=0$

$x_1=1,\ 2$

④より

$x_1=1$ のとき　$y_1=-2$ [C]

$x_1=2$ のとき　$y_1=1$

したがって①から，求める接線の方程式は

$\boldsymbol{x-2y=5,\ 2x+y=5}$

また，接点の座標は $\mathbf{(1,\ -2),\ (2,\ 1)}$

[B]　円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は
$x_1x+y_1y=r^2$

[C]　円外の点から引いた接線の方程式
① 接点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおき，点 P における接線の方程式を求める。
② ①の方程式に，通る円外の点の座標を代入する。
③ 点 P は円上の点であることから，点 P の座標を円の方程式に代入する。
④ ②と③を連立方程式として解き，x_1，y_1 を求め，①に代入して接線の方程式を求める。

第 7 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：6，イ：4，ウ：7

[解説]

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ より，両辺を 2 乗すると $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ であるから

$$(x-1)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y-1)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9$$
$$=x^2-8x+16+y^2-2y+1$$

$$6x-4y-7=0$$

よって，点 P は直線 $6x-4y-7=0$ 上にある。 [A]

逆に，この直線上のすべての点は，条件 $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ を満たす。 [A]

したがって，求める点 P の軌跡は

直線 $6x-4y-7=0$

[A]　点 P の軌跡を求める手順

① 点 P の座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を $x,\ y$ の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。

② ①の図形上のすべての点 P が，与えられた条件を満たすことを確認する。

2 **[正解]** エ：2，オカ：-4，キ：3，ク：2

[解説]

点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

AP：BP＝1：3 より BP＝3AP

両辺を2乗すると　$BP^2=9AP^2$

よって

$$(x+7)^2+(y-5)^2=9\{(x-1)^2+(y+3)^2\}$$

$$x^2+14x+49+y^2-10y+25$$

$$=9(x^2-2x+1+y^2+6y+9)$$

$$8x^2-32x+8y^2+64y+16=0$$

$$x^2-4x+y^2+8y+2=0$$

すなわち　$(x-2)^2+(y+4)^2=18$

よって，点Pは円 $(x-2)^2+(y+4)^2=18$ 上にある。

[B]

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす。

[B]

したがって，求める点Pの軌跡は

中心 $(2,\ -4)$，半径 $3\sqrt{2}$ の円

[B]　点Pの軌跡を求める手順
① 点Pの座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を x, y の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。
② ①の図形上のすべての点Pが，与えられた条件を満たすことを確認する。

第 7 講　PART2 確認問題 解答

1

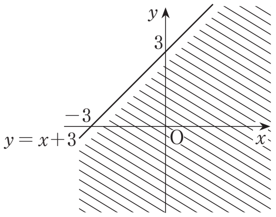
[正解] ア：②

[解説]

不等式 $y<x+3$ の表す領域は，直線 $y=x+3$ の下側である。 [A]

[A]　不等式 $y<mx+n$ の表す領域　直線 $y=mx+n$ の下側（境界線 $y=mx+n$ は含まない）

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線は含まない。

2

[正解] イ：①

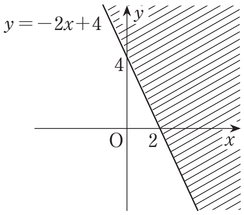
[解説]

$2x+y\geqq 4$ より　$y\geqq -2x+4$

この不等式の表す領域は，直線 $y=-2x+4$ およびその上側である。 [B]

[B]　不等式 $y\geqq mx+n$ の表す領域　直線 $y=mx+n$ の上側（境界線 $y=mx+n$ を含む）

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線を含む。

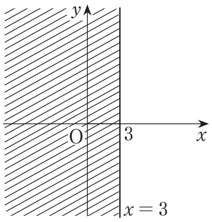
3 [正解] ウ：①

[解説]

不等式 $x \leqq 3$ の表す領域は，直線 $x=3$ およびその左側である。 [C]

[C]　不等式 $x \leqq m$ の表す領域
直線 $x=m$ の左側（境界線 $x=m$ を含む）

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線を含む。

4 [正解] エ：①

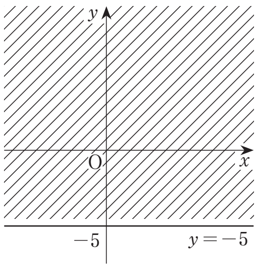
[解説]

$y+5>0$ より $y>-5$

この不等式の表す領域は，直線 $y=-5$ の上側である。 [D]

[D]　不等式 $y>m$ の表す領域
直線 $y=m$ の上側（境界線 $y=m$ は含まない）

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線は含まない。

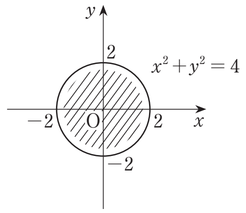
5 [正解] オ：①

[解説]

不等式 $x^2+y^2<4$ の表す領域は，

円 $x^2+y^2=4$ の内部である。 [E]

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線は含まない。

[E]　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域
円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の内部（境界線 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ は含まない）

6 [正解] カ：②

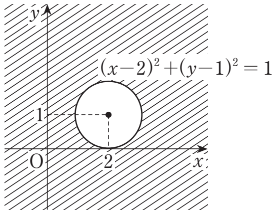
[解説]

不等式 $(x-2)^2+(y-1)^2\geqq 1$ の表す領域は，

円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ およびその外部である。

[F]

よって，求める領域は，下図斜線部分。



ただし，境界線を含む。

[F]　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2\geqq r^2$ の表す領域
円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の外部（境界線 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を含む）

第 7 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]

不等式をそれぞれ

$$\begin{cases} x+y>0 & \cdots\cdots① \\ -2x+y+4<0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおく。

①より　$y>-x$ [A]

よって，①の表す領域は，直線 $y=-x$ の上側である。

②より　$y<2x-4$

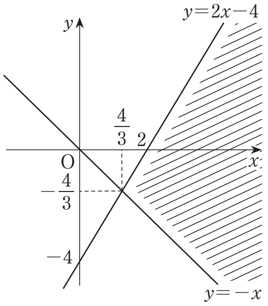
よって，②の表す領域は，直線 $y=2x-4$ の下側である。

また，2 直線 $y=-x$ と $y=2x-4$ の交点の座標は

$$\left(\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$$

したがって，求める領域は，下図斜線部分。

ただし，境界線は含まない。



[A]　連立不等式の表す領域を図示する手順

① それぞれの不等式が表す領域の境界線を図示する。
② ①の境界線に「共有点」があれば，その座標を求め，図に書き込む。
③ それぞれの不等式が表す領域を考え，その「共通部分」に斜線を入れる。
④ 領域に境界線を含むか含まないかを明記する。

2 ［正解］イ：①

［解説］

不等式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4 & \cdots\cdots① \\ y \geqq x+2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおく。

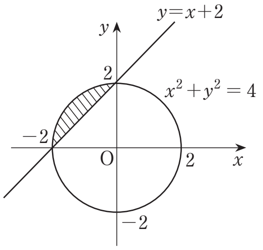
①が表す領域は，円 $x^2+y^2=4$ およびその内部である。［B］

②が表す領域は，直線 $y=x+2$ およびその上側である。

また，円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+2$ の交点の座標は $(-2,\ 0)$，$(0,\ 2)$

よって，求める領域は，下図斜線部分。

ただし，境界線を含む。



［B］ 連立不等式の表す領域を図示する手順

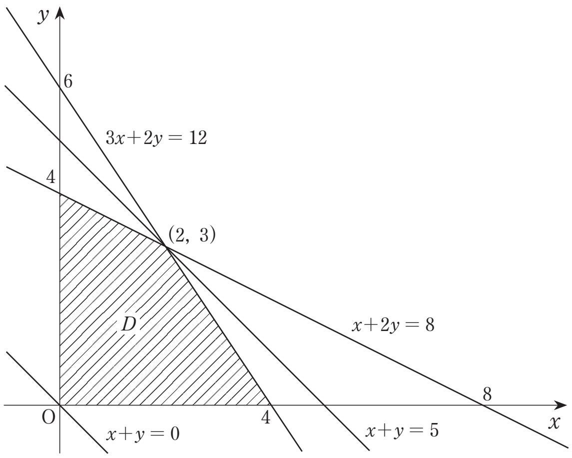
① それぞれの不等式が表す領域の境界線を図示する。
② ①の境界線に「共有点」があれば，その座標を求め，図に書き込む。
③ それぞれの不等式が表す領域を考え，その「共通部分」に斜線を入れる。
④ 領域に境界線を含むか含まないかを明記する。

第 7 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イ：3，ウ：5，エ：0，オ：0，カ：0

[解説]

与えられた連立不等式の表す領域を D とすると，D は4点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする四角形の周および内部である。 [A]



ここで

$x+y=k$ ……① [A]

とおくと，$y=-x+k$ より，①は傾きが -1，y 切片が k の直線である。

この直線が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求める。

図より，k の値が最大になるのは直線①が点 $(2,\ 3)$ を通るときであり，最小になるのは直線①が点 $(0,\ 0)$ を通るときである。 [B]

したがって，$x+y$ は

$x=2$，$y=3$ のとき　最大値 5 [A]

$x=0$，$y=0$ のとき　最小値 0

をとる。

[A]　領域と最大・最小
① 条件として与えられた不等式（連立不等式）の表す領域を図示する。
② 最大値，最小値を求めたい式を「$=k$」とおく。
③ ②の表す図形が，①の領域と共有点をもつときの k の最大値，最小値を求める。

[B]　直線 $y=-x+k$ の y 切片が最大または最小となるときの，直線が通る点を求める。

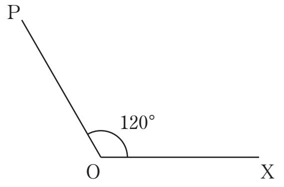
第 8 講　PART1 確認問題 解答

1

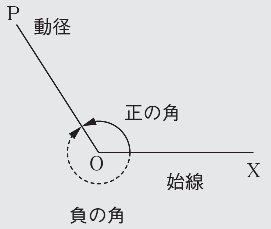
[正解] ア：①

[解説]

120° の動径 OP は，始線 OX から正の向きに 120° だけ回転した位置にある。 [A]



[A]　半直線 OP を，点 O を中心として半直線 OX の位置から回転したものとするとき，半直線 OP を動径，動径の始めの位置を表す半直線 OX を始線という。



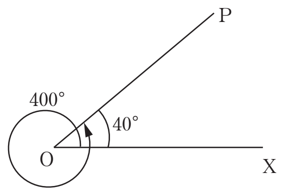
2

[正解] イ：②

[解説]

400° の動径 OP は，始線 OX から正の向きに 400° だけ回転した位置にある。

400°＝40°＋360° であるから，1 回転し，さらに 40° だけ回転しており，40° の動径と一致する。 [B]



[B]　動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると

$\theta = \alpha + 360° \times n$（$n$ は整数）

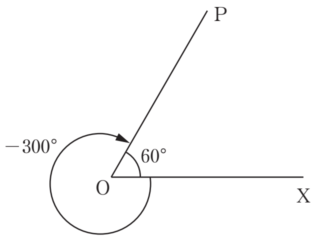
で表される角 θ の動径は，角 α の動径と一致する。

3 [正解] ウ：①

[解説]

$-300°$ の動径 OP は，始線 OX から負の向きに $300°$ だけ回転した位置にある。

$-300°=60°+360°\times(-1)$ であるから，$60°$ の動径と一致する。 [C]



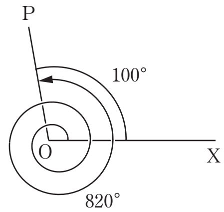
[C]　動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると
　$\theta=\alpha+360°\times n$（$n$ は整数）
で表される角 θ の動径は，角 α の動径と一致する。

4 [正解] エ：②

[解説]

$820°$ の動径 OP は，始線 OX から正の向きに $820°$ だけ回転した位置にある。

$820°=100°+360°\times 2$ であるから，$100°$の動径と一致する。 [D]



[D]　動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると
　$\theta=\alpha+360°\times n$（$n$ は整数）
で表される角 θ の動径は，角 α の動径と一致する。

5 [正解] オ：③

[解説]

$150°$ の動径と同じ位置にあるものは

$$150°+360°\times n \ (n \text{ は整数})$$

と表されるものである。 [E]

$$-210°=150°+360°\times(-1)$$

であるので，$150°$ の動径と同じ位置にあるものは，

$-210°$ である。

[E]　動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角 θ は
　$\theta=\alpha+360°\times n$（$n$ は整数）
と表される。

第 8 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：9

[解説]

$$\frac{\pi}{180}\times 40=\mathbf{\frac{2}{9}}\pi$$ [A]

> [A]　度数法　→　弧度法
> $1^\circ=\frac{\pi}{180}$，$x^\circ=\frac{\pi}{180}\times x$

2

[正解] ウエ：25，オカ：12

[解説]

$$\frac{\pi}{180}\times 375=\mathbf{\frac{25}{12}}\pi$$ [B]

> [B]　度数法　→　弧度法
> $1^\circ=\frac{\pi}{180}$，$x^\circ=\frac{\pi}{180}\times x$

3

[正解] キク：-7，ケ：9

[解説]

$$\frac{\pi}{180}\times(-140)=\mathbf{-\frac{7}{9}}\pi$$ [C]

> [C]　度数法　→　弧度法
> $1^\circ=\frac{\pi}{180}$，$x^\circ=\frac{\pi}{180}\times x$

4

[正解] コサシ：315

[解説]

$$\frac{7}{4}\times 180^\circ=\mathbf{315}^\circ$$ [D]

> [D]　弧度法　→　度数法
> $\pi=180^\circ$

5

[正解] スセソ：-30

[解説]

$$-\frac{1}{6}\times 180^\circ=\mathbf{-30}^\circ$$ [E]

> [E]　弧度法　→　度数法
> $\pi=180^\circ$

6

[正解] タチツ：480

[解説]

$$\frac{8}{3}\times 180^\circ=\mathbf{480}^\circ$$ [F]

> [F]　弧度法　→　度数法
> $\pi=180^\circ$

7 **[正解]** テト：10，ナ：3，ニヌ：25，ネ：3

[解説]

弧の長さは

$$l = 5 \times \frac{2}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{10}{3}\pi}$$ [G]

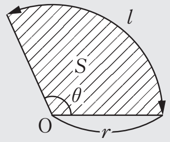
面積は

$$S = \frac{1}{2} \times 5^2 \times \frac{2}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{25}{3}\pi}$$ [G]

[G]　半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

$l = r\theta$

$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$



第 8 講　PART3 確認問題 解答

1

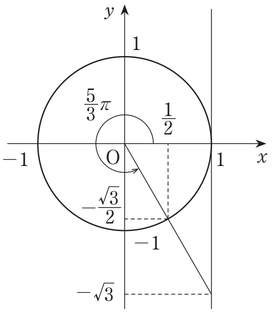
[正解] ア：⑥，イ：②，ウ：⑦

[解説]

$\sin\frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ [A]

$\cos\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2}$

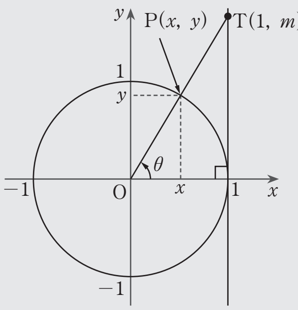
$\tan\frac{5}{3}\pi = -\sqrt{3}$



[A]　単位円を用いた三角関数の値

単位円において，x 軸の正の部分を始線とする角 θ の動径と円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，直線 $x=1$ との交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると

$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$，$\tan\theta = m$



2

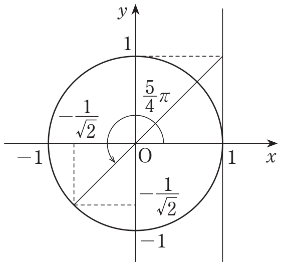
[正解] エ：④，オ：④，カ：①

[解説]

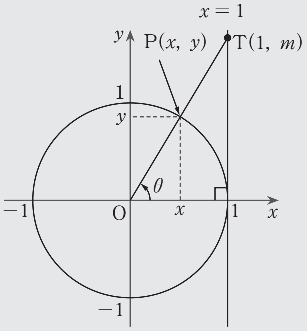
$\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ [B]

$\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\frac{5}{4}\pi = 1$



[B]



$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$，$\tan\theta = m$

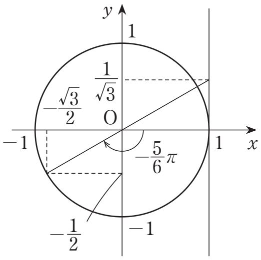
3 [正解] キ：③，ク：⑥，ケ：⑧

[解説]

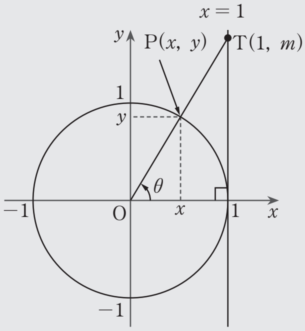
$\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{1}{2}$ [C]

$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$



[C]



$\sin\theta=y,\ \cos\theta=x,\ \tan\theta=m$

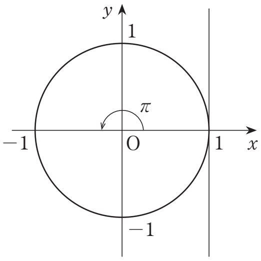
4 [正解] コ：⑦，サ：②，シ：⑦

[解説]

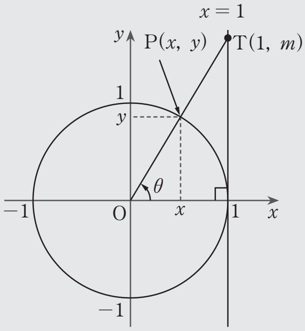
$\sin\pi=0$ [D]

$\cos\pi=-1$

$\tan\pi=0$



[D]



$\sin\theta=y,\ \cos\theta=x,\ \tan\theta=m$

第 8 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤，イ：⑥

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [A]

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

θ が第 4 象限の角であるから，$\sin\theta<0$ [B]

よって

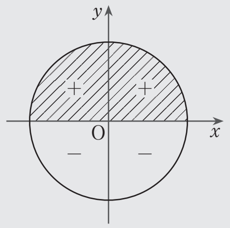
$$\sin\theta=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ [C]

$$=\left(-\frac{3}{5}\right)\div\frac{4}{5}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

[A]　三角関数の相互関係
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

[B]　$\sin\theta$ の値の符号



[C]　三角関数の相互関係
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2

[正解] ウ：⑧，エ：⑥

[解説]

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より [D]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(2\sqrt{2})^2=9$$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

θ が第 3 象限の角であるから，$\cos\theta<0$ [E]

したがって

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

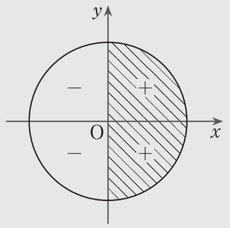
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より [F]

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{\mathbf{2\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$$

[D]　三角関数の相互関係
$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

[E]　$\cos\theta$ の値の符号



[F]　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より
$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$

第 8 講　PART5 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：③，ウ：②，エ：⑥

[解説]

$\sin(\theta+2n\pi)=\boldsymbol{\sin\theta}$，$\cos(\theta+2n\pi)=\boldsymbol{\cos\theta}$ であり　[A]

$$\sin\frac{17}{6}\pi=\sin\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi\right)=\sin\frac{5}{6}\pi=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\frac{17}{6}\pi=\cos\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi\right)=\cos\frac{5}{6}\pi=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

[A]　$\theta+2n\pi$ の三角関数
$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$
$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$
$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$　（n は整数）

2　**[正解]** オ：②，カ：③，キ：④，ク：④

[解説]

$\sin(-\theta)=\boldsymbol{-\sin\theta}$，$\cos(-\theta)=\boldsymbol{\cos\theta}$ であり　[B]

$$\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{4}\pi=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\cos\frac{3}{4}\pi=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

[B]　$-\theta$ の三角関数
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

3 ［正解］ケ：②，コ：④，サ：⑥，シ：③

［解説］

$\sin(\theta+\pi)=\boldsymbol{-\sin\theta}$，$\cos(\theta+\pi)=\boldsymbol{-\cos\theta}$ であり

［C］

$$\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)$$
$$=-\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

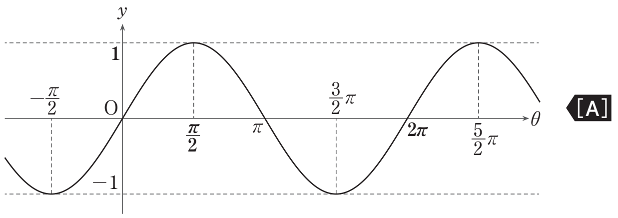
$$\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)$$
$$=-\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

［C］　$\theta+\pi$ の三角関数
$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$
$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$
$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

第 9 講　PART1 確認問題 解答

1　[正解] ア：②，イ：⑥，ウ：④

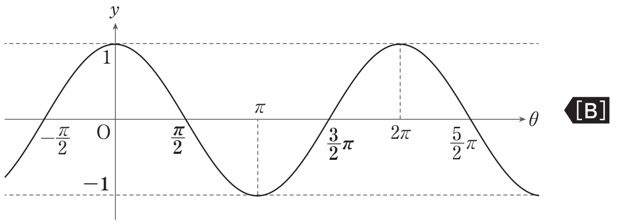
[解説]



[A]　$y=\sin\theta$ の周期は 2π である。$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より，$y=\sin\theta$ のグラフは原点に関して対称。

2　[正解] エ：③，オ：④，カ：⑧

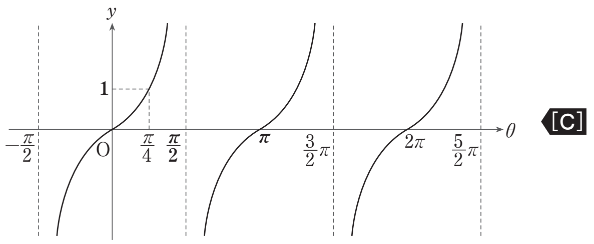
[解説]



[B]　$y=\cos\theta$ の周期は 2π である。$\cos(-\theta)=\cos\theta$ より，$y=\cos\theta$ のグラフは y 軸に関して対称。

3　[正解] キ：②，ク：⑥，ケ：④

[解説]



[C]　$y=\tan\theta$ の周期は π である。$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ より，$y=\tan\theta$ のグラフは原点に関して対称。
漸近線は

$$\theta=\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ \pm\frac{5}{2}\pi,\ \cdots\cdots$$

第 9 講　PART2 確認問題 解答

1

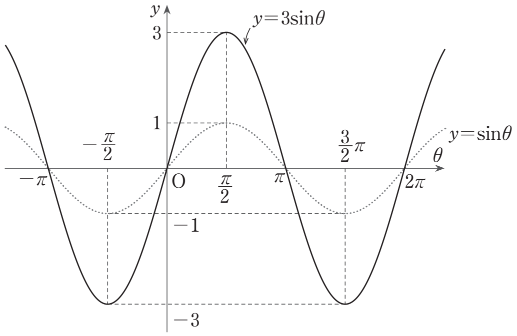
[正解] ア：②，イ：④，ウ：⑧

[解説]

関数 $y=3\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを

y 軸方向に 3 倍したものである。 [A]

また，その周期は **2π** である。 [B]



[A]　関数 $y=a\sin\theta$ $(a>0)$ のグラフ
$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に a 倍

[B]　関数 $y=a\sin\theta$ の周期は
$y=\sin\theta$ の周期と同じく 2π である。

2

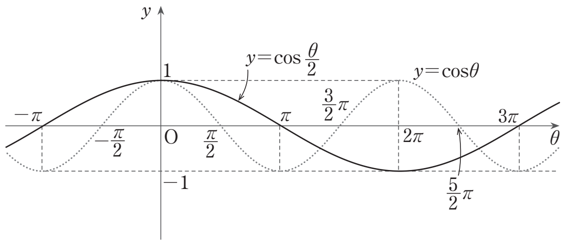
[正解] エ：①，オ：④，カ：⑨

[解説]

関数 $y=\cos\dfrac{\theta}{2}$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを

θ 軸方向に 2 倍したものである。 [C]

また，その周期は **4π** である。 [D]



[C]　関数 $y=\cos k\theta$ $(k>0)$ のグラフ
$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ 倍

[D]　関数 $y=\cos k\theta$ の周期は，$\dfrac{2\pi}{k}$

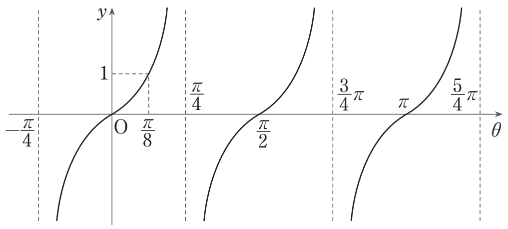
3 [正解] キ：⑦

[解説]

関数 $y = \tan 2\theta$ のグラフは，$y = \tan\theta$ のグラフを

θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍したものである。

また，その周期は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ である。 [E]



[E]　関数 $y = \tan k\theta$ $(k > 0)$ の周期は，$\dfrac{\pi}{k}$

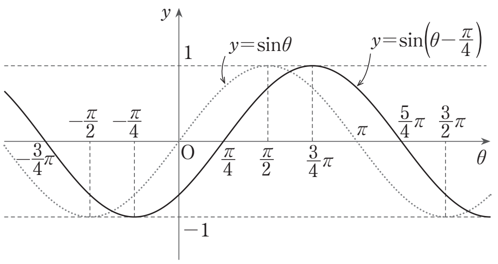
4 [正解] ク：②，ケ：③

[解説]

$y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを

θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである。 [F]

また，その周期は $\boldsymbol{2\pi}$ である。



[F]　関数 $y = \sin(\theta - p)$ のグラフ
$y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に p だけ平行移動
周期は，$y = \sin\theta$ の周期と同じく 2π

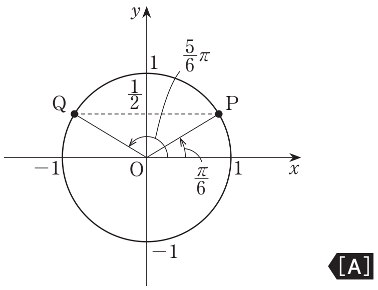
第10講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：⑥

[解説]

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ より，単位円の円周上で，y 座標が $\dfrac{1}{2}$ となる点 P，Q をとる。



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

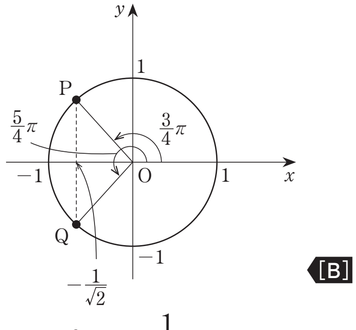
[A]　方程式 $\sin\theta=a$ を満たす θ は，単位円の円周上で，y 座標が a となる点を P，Q とすると，動径 OP，OQ の表す角である。

2

[正解] ウ：⑤，エ：⑧

[解説]

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，単位円の円周上で，x 座標が $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる点 P，Q をとる。



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は

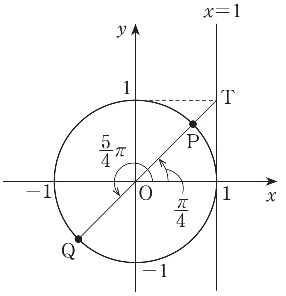
$$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$

[B]　方程式 $\cos\theta=b$ を満たす θ は，単位円の円周上で，x 座標が b となる点を P，Q とすると，動径 OP，OQ の表す角である。

3 **[正解]** オ：②，カ：⑧

[解説]

$\tan\theta = 1$ より，直線 $x = 1$ 上に y 座標が 1 となる点 T をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とする。



[C]

> [C]　方程式 $\tan\theta = c$ を満たす θ は，直線 $x = 1$ 上に点 T$(1,\ c)$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = 1$ を満たす θ は

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

第10講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

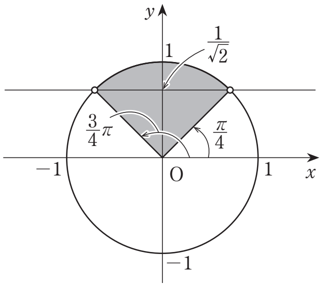
[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$ [A]

よって，$\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi}$$



[A]　三角関数を含む不等式の解法
不等号を等号におき換えた方程式を，単位円を用いて解く。
その解をもとに，単位円において，不等式を満たす θ の値の範囲を求める。

2

[正解] イ：④

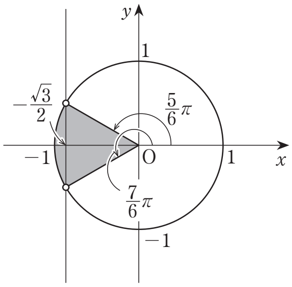
[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の値は

$$\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$$ [B]

よって，$\cos\theta < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi}$$



[B]　三角関数を含む不等式の解法
不等号を等号におき換えた方程式を，単位円を用いて解く。
その解をもとに，単位円において，不等式を満たす θ の値の範囲を求める。

第 11 講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：5，イ：5

[解説]

α は第 1 象限の角であるから　$\cos\alpha > 0$

よって　$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

β は第 2 象限の角であるから　$\sin\beta > 0$

よって　$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

したがって

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$ [A]

$$= \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}$$

[A]　正弦の加法定理
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

2　**[正解]** ウ：2，エ：5，オ：5

[解説]

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$，$\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ であるから

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$ [B]

$$= \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

[B]　余弦の加法定理
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

3 **[正解]** カキ：11，ク：5，ケコ：25

[解説]

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ であるから

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \text{[C]}$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$=-\boldsymbol{\frac{11\sqrt{5}}{25}}$$

[C]　正弦の加法定理
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

4 **[正解]** サ：2，シ：5，スセ：25

[解説]

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ であるから

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \text{[D]}$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{25}}$$

[D]　余弦の加法定理
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

第11講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：5，イ：2，ウ：3

[解説]

直線 $y=5x$ と x 軸の正の向きのなす角が α であるから

$$\tan\alpha=\mathbf{5}\quad\text{[A]}$$

直線 $y=\dfrac{2}{3}x$ と x 軸の正の向きのなす角が β であるから

$$\tan\beta=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

[A]　直線 $y=mx$ と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると
直線の傾き $m=\tan\theta$

2 **[正解]** エオ：17，カ：7

[解説]

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad\text{[B]}$$

$$=\frac{5+\dfrac{2}{3}}{1-5\cdot\dfrac{2}{3}}$$

$$=\frac{15+2}{3-10}$$

$$=-\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{7}}$$

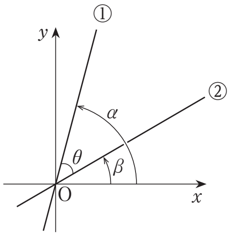
[B]　正接の加法定理
$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

3 [正解] キ：4

[解説]

右図より，2 直線①，②のなす角 θ は [C]

$$\theta=\alpha-\beta$$



よって

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{[D]}$$
$$=\frac{5-\frac{2}{3}}{1+5\cdot\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{15-2}{3+10}=1$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから

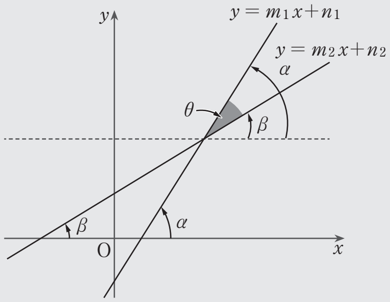
$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

[C]　互いに垂直でない 2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とすると

$m_1=\tan\alpha$，$m_2=\tan\beta$

この 2 直線のなす角を θ とすると

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$



[D]　正接の加法定理

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

第11講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：24，ウエ：25

[解説]

$0<\alpha<\pi$ より，$\sin\alpha>0$

よって　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

したがって

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{[A]}$$

$$=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\mathbf{\frac{24}{25}}$$

[A]　2 倍角の公式
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2

[正解] オ：7，カキ：25

[解説]

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$ より，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$ であるから

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad \text{[B]}$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\mathbf{\frac{7}{25}}$$

[B]　2 倍角の公式
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=1-2\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$

3 [正解] クケ：10

[解説]

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{1-\frac{4}{5}}{2}=\frac{5-4}{10}=\frac{1}{10}$$

$0<\alpha<\pi$ より，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$

したがって

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{10}}}$$

[C]　半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

4 [正解] コ：3，サシ：10

[解説]

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} \quad \text{[D]}$$

$$=\frac{1+\frac{4}{5}}{2}=\frac{5+4}{10}=\frac{9}{10}$$

$0<\alpha<\pi$ より，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$

したがって

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{10}}}$$

[D]　半角の公式

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

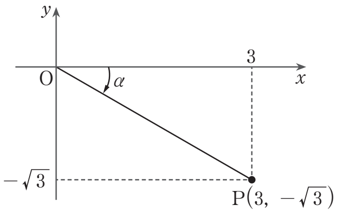
第11講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3，ウ：6

[解説]

$3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ に対し，座標平面上に点 P$(3,\ -\sqrt{3})$ をとると



$$\mathrm{OP}=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$\alpha=-\frac{\pi}{6}$$

よって

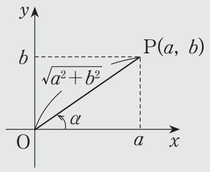
$$3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\mathbf{2\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$$ [A]

[A]　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$
$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

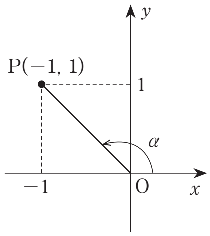


2

[正解] エ：2，オ：3，カ：4

[解説]

$-\sin\theta+\cos\theta$ に対し，座標平面上に点 P$(-1,\ 1)$ をとると



$$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+1^2}$$
$$=\sqrt{2}$$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$\alpha=\frac{3}{4}\pi$$

よって

$$-\sin\theta+\cos\theta=\mathbf{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}$$ [B]

[B]　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$
$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

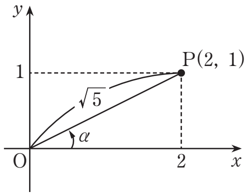
$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3 [正解] キ：5，ク：5

[解説]

$$y = 2\sin\theta + \cos\theta$$
$$= \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$$

[C]



ただし　$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ より

$$-\sqrt{5} \leqq \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha) \leqq \sqrt{5}$$

よって

y の最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$

[C]　三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta$
$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$
ただし

$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

第12講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：3

[解説]

$$a^6 \times a^{-3} = a^{6+(-3)} \quad \text{[A]}$$

$$= \boldsymbol{a^3}$$

[A]　$a^m a^n = a^{m+n}$

2

[正解] イ：6

[解説]

$$a^{-3} \div a^{-5} \times a^4 = a^{-3-(-5)+4} \quad \text{[B]}$$

$$= a^{-3+5+4}$$

$$= \boldsymbol{a^6}$$

[B]　$a^m a^n = a^{m+n}$

$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3

[正解] ウエ：10

[解説]

$$(a^{-2})^{-5} = a^{(-2)\times(-5)} \quad \text{[C]}$$

$$= \boldsymbol{a^{10}}$$

[C]　$(a^m)^n = a^{mn}$

4

[正解] オカ：－6，キ：8，ク：8，ケ：6

[解説]

$$(a^3 b^{-4})^{-2} = (a^3)^{-2}(b^{-4})^{-2} \quad \text{[D]}$$

$$= a^{3\times(-2)} b^{(-4)\times(-2)}$$

$$= \boldsymbol{a^{-6} b^8}$$

$$= \boldsymbol{\frac{b^8}{a^6}}$$

[D]　$(ab)^n = a^n b^n$

$(a^m)^n = a^{mn}$

第12講 PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：3，ウ：2

[解説]

$$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\times2}$$
$$=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{2}\ \text{[A]}$$
$$=3\sqrt[3]{2}$$

[A]　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
$\sqrt[n]{a^n}=a$

2 **[正解]** エ：2

[解説]

$$\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\times8}\ \text{[B]}$$
$$=\sqrt[4]{2^4}$$
$$=2$$

[B]　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
$\sqrt[n]{a^n}=a$

3 **[正解]** オ：2

[解説]

$$\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\frac{40}{5}}\ \text{[C]}$$
$$=\sqrt[3]{8}$$
$$=\sqrt[3]{2^3}$$
$$=2$$

[C]　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
$\sqrt[n]{a^n}=a$

4 **[正解]** カ：3

[解説]

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[3\times2]{729}\ \text{[D]}$$
$$=\sqrt[6]{3^6}$$
$$=3$$

[D]　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$
$\sqrt[n]{a^n}=a$

5 **[正解]** キ：5

[解説]

$$\left(\sqrt[6]{25}\right)^3=\left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3$$
$$=\left(\sqrt[3\times2]{5^{1\times2}}\right)^3 \quad \text{[E]}$$
$$=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$$
$$=5$$

[E]　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

第12講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：8

[解説]

$16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}$ [A]

$=(\sqrt[4]{16})^3$

$=(\sqrt[4]{2^4})^3$

$=2^3$

$=8$

[A]　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

2

[正解] イ：1，ウ：2

[解説]

$8^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{8^{\frac{1}{3}}}$ [B]

$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3}}$

$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

[B]　$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

3

[正解] エ：5

[解説]

$5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{2}{3}}\div5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$ [C]

$=5^{\frac{3+4-1}{6}}$

$=5^1$

$=\mathbf{5}$

[C]　$a^r a^s=a^{r+s}$

$a^r\div a^s=\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

4 [正解] オ：1，カ：5

[解説]

$$\left(25^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=25^{\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}} \quad \text{[D]}$$

$$=25^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(5^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=5^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=5^{-1}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

[D]　$(a^{r})^{s}=a^{rs}$

5 [正解] キ：7

[解説]

$$\sqrt[3]{7}\times\sqrt[4]{7}\div\sqrt[12]{7}=7^{\frac{1}{3}}\times7^{\frac{1}{4}}\times7^{-\frac{1}{12}}$$

$$=7^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}} \quad \text{[E]}$$

$$=7^{\frac{4+3-1}{12}}$$

$$=7^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\mathbf{7}}$$

[E]　$a^{r}a^{s}=a^{r+s}$

$a^{r}\div a^{s}=\dfrac{a^{r}}{a^{s}}=a^{r-s}$

6 [正解] ク：1

[解説]

$$\sqrt[6]{81}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\div\sqrt[12]{9}=\sqrt[6]{3^4}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\div\sqrt[12]{3^2}$$

$$=3^{\frac{4}{6}}\times3^{-\frac{1}{2}}\div3^{\frac{2}{12}}$$ [F]

$$=3^{\frac{4}{6}}\times3^{-\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{2}{12}}$$

$$=3^{\frac{4}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}$$ [G]

$$=3^{\frac{4-3-1}{6}}$$

$$=3^0$$ [H]

$$=\mathbf{1}$$

[F] $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

$\frac{1}{a^r}=a^{-r}$

[G] $a^r a^s=a^{r+s}$

[H] $a\neq0$ のとき，$a^0=1$

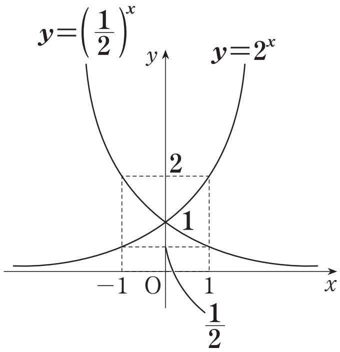
第 13 講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：②，ウ：④，エ：①，オ：②

[解説]

右上がりの曲線となるのは，①の $y=2^x$，

右下がりの曲線となるのは，②の $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ である。 [A]



$y=2^x$ のグラフは点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$ を，

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは点 $(0,\ 1)$，$\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ を通る。 [A]

[A]　$y=a^x$ のグラフ
・$a>1$ のとき　右上がりの曲線
・$0<a<1$ のとき　右下がりの曲線
x 軸を漸近線としてもち，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。

第13講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3}$$ [A]

$$\sqrt[4]{32}=(2^5)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$$

$$1=2^0$$

指数の大小について

$$-3<0<\frac{5}{4}$$

底 2 は 1 より大きいから [B]

$$2^{-3}<2^0<2^{\frac{5}{4}}$$

よって　$\boldsymbol{\frac{1}{8}<1<\sqrt[4]{32}}$

[A]　比較する数の底をそろえる。

[B]
・$a>1$ のとき　$p<q \Longleftrightarrow a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
　$p<q \Longleftrightarrow a^p>a^q$

2 [正解] イ：③

[解説]

$$\sqrt[5]{\frac{1}{4}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$$ [C]

$$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

指数の大小について

$$\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{4}{3}$$

底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから [D]

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$$

よって　$\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt{\frac{1}{2}}<\sqrt[5]{\frac{1}{4}}}$

[C]　比較する数の底をそろえる。

[D]
・$a>1$ のとき　$p<q \iff a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
　$p<q \iff a^p>a^q$

第13講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：2

[解説]

$4^x=32$ より

$$2^{2x}=2^5$$

よって

$$2x=5 \quad \text{[A]}$$

$$\boldsymbol{x=\frac{5}{2}}$$

[A]　$a>0$，$a\neq 1$ のとき
$p=q \Longleftrightarrow a^p=a^q$

2

[正解] ウ：3，エ：2

[解説]

$9^x=\dfrac{1}{27}$ より

$$3^{2x}=3^{-3}$$

よって

$$2x=-3 \quad \text{[B]}$$

$$\boldsymbol{x=-\frac{3}{2}}$$

[B]　$a>0$，$a\neq 1$ のとき
$p=q \Longleftrightarrow a^p=a^q$

3

[正解] オ：①

[解説]

$3^x<81$ より

$$3^x<3^4$$

底3は1より大きいから [C]

$$\boldsymbol{x<4}$$

[C]　$a>1$ のとき
$p<q \Longleftrightarrow a^p<a^q$

4 [正解] カ：③

[解説]

$\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから [D]

$$2x \leqq x+1$$

したがって

$$\boldsymbol{x \leqq 1}$$

[D]　$0<a<1$ のとき
　$p<q \Longleftrightarrow a^p>a^q$

第 14 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：③，ウ：④

[解説]

$3^2=9$ より　$2=\log_3 9$ [A]

> [A]　$a^p=M \iff p=\log_a M$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ M>0)$

2

[正解] エ：④，オ：②，カ：①

[解説]

$2^{-4}=\dfrac{1}{16}$ より　$-4=\log_2\dfrac{1}{16}$ [B]

> [B]　$a^p=M \iff p=\log_a M$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ M>0)$

3

[正解] キ：①，ク：④，ケ：③

[解説]

$49^{\frac{1}{2}}=7$ より　$\dfrac{1}{2}=\log_{49}7$ [C]

> [C]　$a^p=M \iff p=\log_a M$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ M>0)$

4

[正解] コ：②，サ：③，シ：④

[解説]

$\log_2 32=5$ より　$2^5=32$ [D]

> [D]　$p=\log_a M \iff a^p=M$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ M>0)$

5

[正解] ス：③，セ：①，ソ：④

[解説]

$\log_{10}\dfrac{1}{100}=-2$ より　$10^{-2}=\dfrac{1}{100}$ [E]

> [E]　$p=\log_a M \iff a^p=M$
> $(a>0,\ a\neq 1,\ M>0)$

6 **[正解]** タ：④，チ：②，ツ：③

[解説]

$\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$ より　$81^{\frac{1}{4}} = 3$ [F]

[F]　$p = \log_a M \iff a^p = M$
$(a > 0,\ a \neq 1,\ M > 0)$

7 **[正解]** テ：4

[解説]

$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ [G]

[G]　$\log_a a^p = p\ (a > 0,\ a \neq 1)$

8 **[正解]** ト：1，ナ：2

[解説]

$\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ [H]

[H]　$\log_a a^p = p\ (a > 0,\ a \neq 1)$

9 **[正解]** ニヌ：－3

[解説]

$\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 \frac{1}{3^3}$

$= \log_3 3^{-3} = -3$ [I]

[I]　$\log_a a^p = p\ (a > 0,\ a \neq 1)$

第14講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

$$\log_6 4+\log_6 9=\log_6(4\times 9)$$ [A]

$$=\log_6 36$$

$$=\log_6 6^2$$ [B]

$$=2$$

[A]　対数の性質
$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$

[B]　$\log_a a^p=p$ $(a>0,\ a\neq 1)$

2

[正解] イウ：-3

[解説]

$$\log_2 3-\log_2 24=\log_2\frac{3}{24}$$ [C]

$$=\log_2\frac{1}{8}$$

$$=\log_2 2^{-3}$$ [D]

$$=-3$$

[C]　対数の性質
$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$

[D]　$\log_a a^p=p$ $(a>0,\ a\neq 1)$

3

[正解] エ：1

[解説]

$$2\log_3\sqrt{15}-\log_3 5=\log_3\left(15^{\frac{1}{2}}\right)^2-\log_3 5$$ [E]

$$=\log_3 15^{\frac{1}{2}\times 2}-\log_3 5$$

$$=\log_3 15-\log_3 5$$

$$=\log_3\frac{15}{5}$$ [E]

$$=\log_3 3$$

$$=1$$

[E]　対数の性質
$\log_a M^k=k\log_a M$
$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0,\ k$ は実数)

4　[正解] オ：2

[解説]

$$\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}+6\log_2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_2 5$$

$$=\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}+\log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6-\log_2 5^{\frac{1}{2}}$$ [F]

$$=\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}+\log_2 8-\log_2\sqrt{5}$$

$$=\log_2\frac{\sqrt{5}\times 8}{2\times\sqrt{5}}$$ [F]

$$=\log_2 4$$

$$=\log_2 2^2$$

$$=\mathbf{2}$$

[F]　対数の性質

$\log_a M^k=k\log_a M$

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

（$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，k は実数）

第 14 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2

[解説]

$$\log_{25}125=\frac{\log_5 125}{\log_5 25}$$ [A]

$$=\frac{\log_5 5^3}{\log_5 5^2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

[A]　底の変換公式

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

（a，b，c は正の数，$a\neq1$，$c\neq1$）

2

[正解] ウ：3，エ：4

[解説]

$$\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{8}=\frac{\log_2\sqrt{8}}{\log_2\frac{1}{4}}$$ [B]

$$=\frac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_2 2^{-2}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{-2}$$

$$=-\frac{3}{4}$$

[B]　底の変換公式

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

（a，b，c は正の数，$a\neq1$，$c\neq1$）

3

[正解] オ：4

[解説]

$$\log_3 5\cdot\log_5 81=\log_3 5\times\frac{\log_3 81}{\log_3 5}$$ [C]

$$=\log_3 81$$

$$=\log_3 3^4$$

$$=4$$

[C]　底の変換公式で底をそろえて，対数の計算を行うとよい。

4 **[正解]** カ：3

[解説]

$$\log_2 24 - \log_4 9 = \log_2 24 - \frac{\log_2 9}{\log_2 4} \quad \text{[D]}$$

$$= \log_2 24 - \frac{\log_2 3^2}{2}$$

$$= \log_2 24 - \frac{2\log_2 3}{2}$$

$$= \log_2 24 - \log_2 3$$

$$= \log_2 \frac{24}{3}$$

$$= \log_2 8$$

$$= \log_2 2^3$$

$$= 3$$

［D］　底の変換公式で底をそろえて，対数の計算を行うとよい。

第15講　PART1 確認問題 解答

1

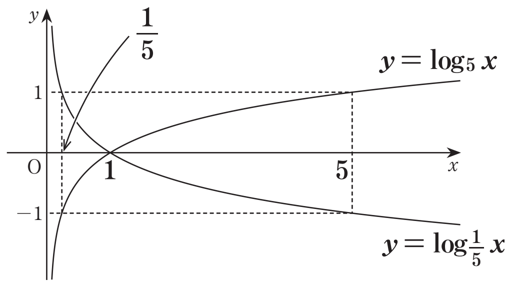
[正解] ア：①，イ：②，ウ：①，エ：②，オ：④

[解説]

$5>1$ より，右上がりの曲線は，①の $y=\log_5 x$，

$0<\dfrac{1}{5}<1$ より，右下がりの曲線は，②の $y=\log_{\frac{1}{5}} x$

である。[A]



$y=\log_5 x$ のグラフは点 $(1,\ 0)$，$(5,\ 1)$ を，

$y=\log_{\frac{1}{5}} x$ のグラフは点 $(1,\ 0)$，$\left(\dfrac{1}{5},\ 1\right)$ を通る。

[A]

[A]　対数関数 $y=\log_a x$ のグラフ
・$a>1$ のとき　右上がりの曲線
・$0<a<1$ のとき　右下がりの曲線
y 軸を漸近線としてもち，点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る。

第 15 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]

0，$2\log_{\frac{1}{3}}5$ を変形すると [A]

$$0=\log_{\frac{1}{3}}1$$

$$2\log_{\frac{1}{3}}5=\log_{\frac{1}{3}}5^2=\log_{\frac{1}{3}}25$$

真数の大小について　$1<15<25$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから [B]

$$\log_{\frac{1}{3}}25<\log_{\frac{1}{3}}15<\log_{\frac{1}{3}}1$$

よって　$\mathbf{2\log_{\frac{1}{3}}5<\log_{\frac{1}{3}}15<0}$

[A]　比較する数の底をそろえる。

[B]
・$a>1$ のとき
$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$
・$0<a<1$ のとき
$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

2

[正解] イ：②

[解説]

1，$\log_4 9$ を変形すると [C]

$$1=\log_2 2$$

$$\log_4 9=\frac{\log_2 9}{\log_2 4}=\frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}$$

$$=\frac{2\log_2 3}{2}=\log_2 3$$

真数の大小について　$2<3<6$

底 2 は 1 より大きいから [D]

$$\log_2 2<\log_2 3<\log_2 6$$

よって　$\mathbf{1<\log_4 9<\log_2 6}$

[C]　比較する数の底をそろえる。

[D]
・$a>1$ のとき
$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$
・$0<a<1$ のとき
$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

第15講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：64

[解説]

真数は正であるから　$x>0$　……①　[A]

このとき，対数の定義から

$$x=4^3=64$$ [B]

これは①を満たすから　$\boldsymbol{x=64}$

［A］　真数が正であることに注意。

［B］　$\log_a x=b \iff x=a^b$
$(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$

2

[正解] ウエ：15

[解説]

真数は正であるから　$x-6>0$ [C]

よって　$x>6$　……①

このとき，対数の定義から

$$x-6=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=(3^{-1})^{-2}=9$$ [D]

$$x=9+6=15$$

これは①を満たすから　$\boldsymbol{x=15}$

［C］　真数が正であることに注意。

［D］　$\log_a x=b \iff x=a^b$
$(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$

3 [正解] オ：④

[解説]

真数は正であるから　$x>0$　……①　[E]

このとき，与えられた不等式を変形すると

$$\log_5 x > \log_5 5^2$$

すなわち　$\log_5 x > \log_5 25$

底 5 は 1 より大きいから　[F]

$$x>25 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より　$\boldsymbol{x>25}$

> [E]　真数が正であることに注意。

> [F]
> ・$a>1$ のとき
> $0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$
> ・$0<a<1$ のとき
> $0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

4 [正解] カ：③

[解説]

真数は正であるから　$x+2>0$　[G]

よって　$x>-2$　……①

このとき，与えられた不等式を変形すると

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqq \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{8}$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　[H]

$$x+2 \leqq \frac{1}{8}$$

よって　$x \leqq -\dfrac{15}{8}$　……②

①，②より　$\boldsymbol{-2<x\leqq-\dfrac{15}{8}}$

> [G]　真数が正であることに注意。

> [H]
> ・$a>1$ のとき
> $0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$
> ・$0<a<1$ のとき
> $0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

第15講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイウエ：6532

[解説]

$$\log_{10} 45 = \log_{10}(3^2 \times 5)$$
$$= \log_{10} 3^2 + \log_{10} 5$$
$$= 2\log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}$$ [A]
$$= 2\log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2$$
$$= 2 \times 0.4771 + 1 - 0.3010$$
$$= \mathbf{1.6532}$$

[A]　常用対数 $\log_{10} 2$，$\log_{10} 3$ を用いた式で表す。
$\log_{10} 5$ は

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2}$$
$$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2$$
$$= 1 - \log_{10} 2$$

と表せる。

2

[正解] オカ：16

[解説]

2^{50} の常用対数をとると [B]

$$\log_{10} 2^{50} = 50\log_{10} 2$$
$$= 50 \times 0.3010$$
$$= 15.05$$

よって　$15 < \log_{10} 2^{50} < 16$

これより

$$10^{15} < 2^{50} < 10^{16}$$

したがって　2^{50} は **16 桁**の整数である。

[B]　正の整数 N の桁数を求める手順
① N の常用対数をとり，$\log_{10} N$ の値を求める。
② $n-1 \leqq \log_{10} N < n$ を満たす整数 n を求める。
③ $10^{n-1} \leqq N < 10^n$ の形で表す。
④ 正の整数 N は n 桁である。

第 16 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：10

[解説]

x の値が 1 から 4 まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{2\cdot4^2-2\cdot1^2}{3}$$ [A]

$$=\frac{32-2}{3}$$

$$=\mathbf{10}$$

[A]　平均変化率
関数 $f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するときの平均変化率は
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
これは，2 点 $A(a,\ f(a))$，$B(b,\ f(b))$ を通る直線の傾きを表している。

2

[正解] ウ：2，エ：4

[解説]

x の値が 1 から $1+h$ まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{2(1+h)^2-2\cdot1^2}{h}$$ [B]

$$=\frac{2\left(1+2h+h^2\right)-2}{h}$$

$$=\frac{2h^2+4h}{h}$$

$$=\frac{h(2h+4)}{h}$$

$$=\mathbf{2h+4}$$

[B]　平均変化率
関数 $f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するときの平均変化率は
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

第 16 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：5

[解説]

$$\lim_{x\to 0}(2x+5)=5$$ [A]

> [A]　極限値
> 関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づく場合，この値 α を，x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の「極限値」という。
> $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ または
> $x\to a$ のとき $f(x)\to\alpha$

2

[正解] イ：3

[解説]

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(h+3)$$ [B]

$$=3$$

> [B]　極限値
> 関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づく場合，この値 α を，x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の「極限値」という。
> $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ または
> $x\to a$ のとき $f(x)\to\alpha$

3 [正解] ウ：6

[解説]

関数 $f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数は

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} \quad \text{[C]}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(6+h)$$
$$=6$$

[C]　微分係数

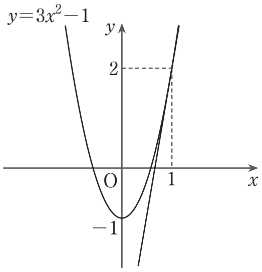
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

4 [正解] エ：6

[解説]

$f(x)=3x^2-1$ とおくと，曲線 $y=3x^2-1$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線の傾きは $f'(1)$ であるから [D]

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \text{[E]}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{3(1+h)^2-1\}-(3\cdot 1^2-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h+3h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(6+3h)$$
$$=6$$



[D]　微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しい。

[E]　微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

第16講 PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：3

[解説]

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [A]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-3x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}3$$

$$=3$$

[A]　導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を「微分する」という。

2 **[正解]** ウ：8，エ：4，オ：8

[解説]

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [B]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-4x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{8xh+4h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(8x+4h)$$

$$=8x$$

[B]　導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

3 [正解] カ：6，キ：6，ク：2，ケ：③

[解説]

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [C]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3-2x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-2x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6x^2h+6xh^2+2h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(6x^2+6xh+2h^2)$$

$$=\mathbf{6x^2}$$

[C]　導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

4 [正解] コ：①

[解説]

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [D]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2-(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}0=\mathbf{0}$$

[D]　導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

第 16 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：6，イ：4，ウ：8

[解説]

関数 $f(x)=3x^2-4x+2$ を微分すると

$$f'(x)=3(x^2)'-4(x)'+(2)' \quad \text{[A]}$$
$$=3\cdot 2x-4\cdot 1+0 \quad \text{[B]}$$
$$=\mathbf{6x-4}$$

また，$x=2$ における微分係数は

$$f'(2)=6\cdot 2-4=8 \quad \text{[C]}$$

> [A]　k，l を定数とするとき
> $\{kf(x)\}'=kf'(x)$
> $\{kf(x)\pm lg(x)\}'=kf'(x)\pm lg'(x)$
> （複号同順）

> [B]　n を正の整数，c を定数とするとき
> $(x^n)'=nx^{n-1}$，$(c)'=0$

> [C]　微分係数 $f'(a)$ の求め方
> ①　$f(x)$ を微分し，導関数 $f'(x)$ を求める。
> ②　$f'(x)$ に $x=a$ を代入する。

2

[正解] エ：3，オ：4，カ：5

[解説]

関数 $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$ を微分すると

$$f'(x)=(x^3)'-2(x^2)'+5(x)'+(1)' \quad \text{[D]}$$
$$=3x^2-2\cdot 2x+5\cdot 1+0 \quad \text{[E]}$$
$$=3x^2-4x+5$$

よって，$x=t$ における微分係数は

$$f'(t)=\mathbf{3t^2-4t+5}$$

> [D]　k，l を定数とするとき
> $\{kf(x)\}'=kf'(x)$
> $\{kf(x)\pm lg(x)\}'=kf'(x)\pm lg'(x)$
> （複号同順）

> [E]　n を正の整数，c を定数とするとき
> $(x^n)'=nx^{n-1}$，$(c)'=0$

第17講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：1

[解説]

$f(x)=x^2-x+3$ とおくと，$f'(x)=2x-1$

よって，点 $(2,\ 5)$ における接線の傾きは

$f'(2)=2\cdot2-1=3$ [A]

したがって，点 $(2,\ 5)$ における接線の方程式は

$y=3(x-2)+5$ [A]

すなわち　$\boldsymbol{y=3x-1}$

[A]　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

2 **[正解]** ウエ：-5，オ：7

[解説]

$f(x)=-2x^2+3x-1$ とおくと，$f'(x)=-4x+3$

点 A における接線の傾きは

$f'(2)=-4\cdot2+3=-5$ [B]

また，$f(2)=-2\cdot2^2+3\cdot2-1=-3$ より，点 A の座標は $(2,\ -3)$

したがって，点 A における接線の方程式は

$y=-5(x-2)-3$ [B]

すなわち　$\boldsymbol{y=-5x+7}$

[B]　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

第 17 講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：5，ウ：0，エ：4，オ：3，カ：5，
キ：5，クケ：11

[解説]

$f(x)=x^2-3x+5$ とおくと

$$f'(x)=2x-3$$

接点の座標を $(a,\ a^2-3a+5)$ とおくと，接線の傾きは　$f'(a)=2a-3$

よって，点 $(a,\ a^2-3a+5)$ における接線の方程式は

$$y=(2a-3)(x-a)+a^2-3a+5$$ [A]

$$y=(2a-3)x+(2a-3)\cdot(-a)+a^2-3a+5$$

すなわち　$\boldsymbol{y=(2a-3)x-a^2+5}$　……①

この直線が，点 A(2，−1) を通るので

$$-1=(2a-3)\cdot 2-a^2+5$$

$$a^2-4a=0$$

$$a(a-4)=0$$

よって　$\boldsymbol{a=0,\ 4}$

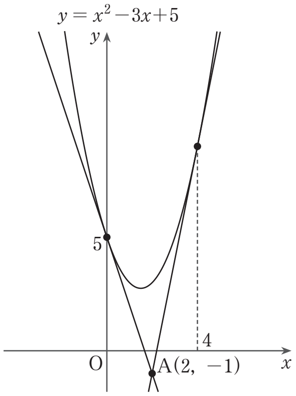
①より

$a=0$ のとき

$$\boldsymbol{y=-3x+5}$$

$a=4$ のとき

$$\boldsymbol{y=5x-11}$$



[A]　曲線上にない点 A から引いた接線の方程式
接点の x 座標を「a」などの文字でおき，その文字を用いて接線の方程式を表し，接線が点 A を通るときの a の値を求め，接線の方程式を導く。

第17講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：0，イ：1，ウ：①，エ：②，
オ：①，カ：③，キ：④，ク：③

[解説]

$f(x)=2x^3-3x^2+2$ より

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると [A]

$$6x(x-1)=0$$

$$x=0,\ 1$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

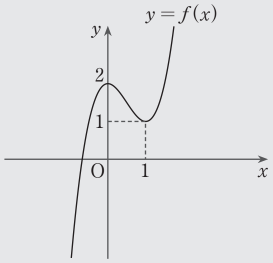
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

[B] [C]

[A]　$f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。

[B]　ある区間で常に
$f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調増加
$f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調減少
$f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ はその区間で定数

[C]



2 **[正解]** ケ：1，コ：3，サ：②，シ：①，
ス：②，セ：④，ソ：③，タ：④

[解説]

$f(x)=-x^3+6x^2-9x$ より

$$f'(x)=-3x^2+12x-9$$
$$=-3(x^2-4x+3)$$
$$=-3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると [D]

$$-3(x-1)(x-3)=0$$

$$x=1,\ 3$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

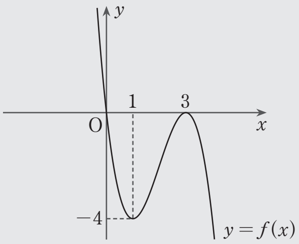
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	0	↘

[E] [F]

[D]　$f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。

[E]　ある区間で常に
$f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調増加
$f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調減少
$f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ はその区間で定数

[F]



第 17 講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：①，イ：③，ウ：①，エ：①

[解説]

$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ より

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$
$$=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると

$$\boldsymbol{x=-1,\ 3}$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7 極大	↘	-25 極小	↗

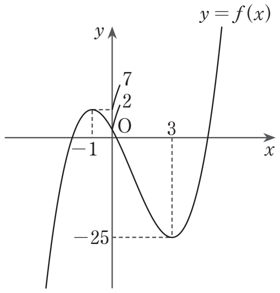
[A]

したがって，$f(x)$ は

$x=-1$ で極大値 **7**

$x=3$ で極小値 **−25**

をとる。グラフは下図のようになる。



[A]　関数の極大・極小
$f'(a)=0$ となる $x=a$ の前後で
$f'(x)$ の符号が正から負に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極大値
$f'(x)$ の符号が負から正に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極小値

2 [正解] オ：②，カ：⑥，キ：⑥，ク：③

[解説]

$f(x)=x^3+6x^2+12x-18$ より

$$f'(x)=3x^2+12x+12$$
$$=3(x^2+4x+4)$$
$$=3(x+2)^2$$

$f'(x)=0$ とすると

$$\boldsymbol{x=-2}$$

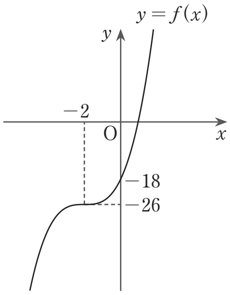
よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	-26	↗

[B]

したがって，$f(x)$ は常に増加し，**極値をもたない**。

グラフは下図のようになる。



[B]　関数の極大・極小
$f'(a)=0$ となる $x=a$ の前後で
$f'(x)$ の符号が正から負に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極大値
$f'(x)$ の符号が負から正に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極小値
$f'(x)$ の符号に変化がなければ，$f(x)$ は
その x において極値をとらない。

第 17 講　PART5 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：9，ウ：5，エオ：72

[解説]

$f(x)=-x^3+12x-7$ より

$$f'(x)=-3x^2+12=-3(x^2-4)=-3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2,\ 2$

よって，区間 $-3 \leqq x \leqq 5$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。[A]

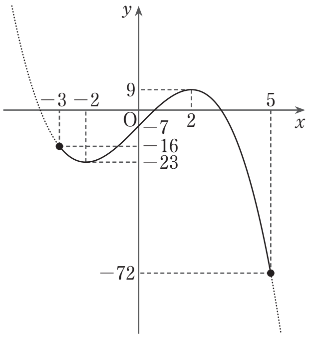
x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-16	↘	-23	↗	9	↘	-72

したがって，$f(x)$ は

$x=2$ で，最大値 **9** [B]

$x=5$ で，最小値 **−72**

をとる。



[A]　定義域の $-3 \leqq x \leqq 5$ の範囲で増減表をかく。

[B]　区間内の極値と，区間の端における関数の値を比較し，最大値，最小値を求める。

2 [正解] カ：3，キ：5，ク：2，ケ：1

[解説]

$f(x)=x^3-3x^2+5$ より

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$ にすると　$x=0,\ 2$

よって，区間 $1 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。[C]

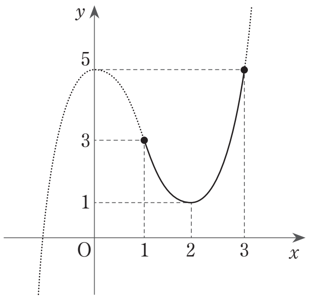
x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	1	↗	5

したがって，$f(x)$ は

$x=3$ で，最大値 **5** [D]

$x=2$ で，最小値 **1**

をとる。



[C]　定義域の $1 \leqq x \leqq 3$ の範囲で増減表をかく。

[D]　区間内の極値と，区間の端における関数の値を比較し，最大値，最小値を求める。

第 17 講　PART6 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤，イ：②，ウ：3

[解説]

$f(x)=x^3-3x+1$ より

$$f'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)=3(x+1)(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになり，$f(x)$ は

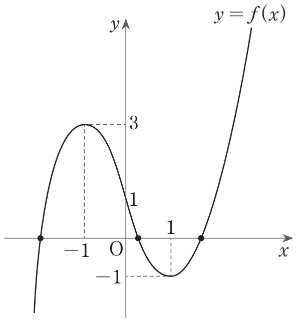
$x=-1$ で極大値 3,

$x=1$ で極小値 **−1**

をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，グラフと x 軸の共有点の個数は 3 個である。 [A]



ゆえに，方程式

$x^3-3x+1=0$ の異なる実数解の個数は **3 個**である。

[B]

[A]　$y=f(x)$ のグラフをかいて，x 軸との共有点の個数を求める。

[B]　3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数
$\Longleftrightarrow$ 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

2 [正解] エ：④，オ：③，カ：2

[解説]

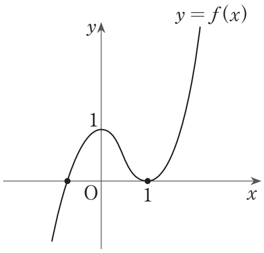
$f(x)=2x^3-3x^2+1$ より

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになり，$f(x)$ は $x=0$ で極大値 **1**，$x=1$ で極小値 **0** をとる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である。[C]



ゆえに，方程式 $2x^3-3x^2+1=0$ の異なる実数解の個数は **2 個**である。[D]

[C]　$y=f(x)$ のグラフをかいて，x 軸との共有点の個数を求める。

[D]　3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数
⟺ 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

3 [正解] キ：⑥，ク：⑥，ケ：1

[解説]

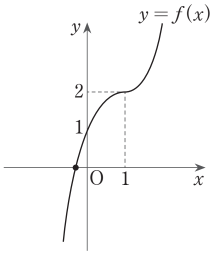
$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ より

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになり，$f(x)$ は**極値をもたない**。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個である。[E]



ゆえに，方程式 $x^3-3x^2+3x+1=0$ の異なる実数解の個数は **1 個**である。[F]

[E]　$y=f(x)$ のグラフをかいて，x 軸との共有点の個数を求める。

[F]　3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数
⟺ 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

第18講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：②，イ：④，ウ：④

[解説]

$(x^4)'=4x^3$　より　$\left(\frac{1}{4}x^4\right)'=x^3$

よって

$$\int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4+C \quad (C\text{ は積分定数})$$ [A]

[A]　不定積分
$F'(x)=f(x)$ のとき
$$\int f(x)dx=F(x)+C$$
（C は積分定数）

2 **[正解]** エ：①，オ：③，カ：③

[解説]

$(x)'=1$　より　$(2x)'=2$

よって

$$\int 2dx=2x+C \quad (C\text{ は積分定数})$$ [B]

[B]　不定積分
$F'(x)=f(x)$ のとき
$$\int f(x)dx=F(x)+C$$
（C は積分定数）

第18講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イ：2，ウ：3

[解説]

$$\int(6x^2+4x-3)dx$$

$$=6\int x^2dx+4\int xdx-3\int dx \quad \text{[A]}$$

$$=6\cdot\frac{1}{3}x^3+4\cdot\frac{1}{2}x^2-3\cdot x+C \quad \text{[B]}$$

$$=\boldsymbol{2x^3+2x^2-3x+C}$$ （C は積分定数）

[A]　$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ （k は定数）

$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

[B]　$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

（n は 0 または正の整数，C は積分定数）

2　**[正解]** エ：3，オ：2

[解説]

$$\int(t^2+t+1)dt$$

$$=\int t^2dt+\int tdt+\int dt \quad \text{[C]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t+C}$$ （C は積分定数）[D]

[C]　$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

[D]　$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

（n は 0 または正の整数，C は積分定数）

第 18 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3

[解説]

$$\int_1^2 (4x-3)dx$$

$=\Big[2x^2-3x\Big]_1^2$ [A]

$=(2\cdot 2^2-3\cdot 2)-(2\cdot 1^2-3\cdot 1)$

$=2-(-1)$

$=3$

[A]　関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると
$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

2　**[正解]** イ：4

[解説]

$$\int_{-1}^3 (3x^2-8x+2)dx$$

$=\Big[x^3-4x^2+2x\Big]_{-1}^3$ [B]

$=(3^3-4\cdot 3^2+2\cdot 3)$

$\quad -\{(-1)^3-4\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)\}$

$=-3-(-7)$

$=4$

[B]　関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると
$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

第 18 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：0

[解説]

$$\int_{2}^{2}(x^2+x)dx=0$$ [A]

[A] $\int_{a}^{a}f(x)dx=0$

2

[正解] イウ：12

[解説]

$$\int_{-3}^{2}(2x^2+3x-4)dx-\int_{3}^{2}(2x^2+3x-4)dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(2x^2+3x-4)dx+\int_{2}^{3}(2x^2+3x-4)dx$$ [B]

$$=\int_{-3}^{3}(2x^2+3x-4)dx$$ [C]

$$=2\int_{-3}^{3}x^2dx+3\int_{-3}^{3}xdx-4\int_{-3}^{3}dx$$ [D]

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{3}+3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{3}-4\left[x\right]_{-3}^{3}$$

$$=\frac{2}{3}\{3^3-(-3)^3\}+\frac{3}{2}\{3^2-(-3)^2\}-4\{3-(-3)\}$$

$$=\frac{2}{3}(27+27)+\frac{3}{2}(9-9)-4(3+3)$$

$$=36+0-24$$

$$=12$$

[B] $\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$

[C] $\int_{a}^{b}f(x)dx$

$$=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx$$

[D] $\int_{a}^{b}kf(x)dx=k\int_{a}^{b}f(x)dx$

（k は定数）

$\int_{a}^{b}\{f(x)+g(x)\}dx$

$$=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{a}^{b}g(x)dx$$

$\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx$

$$=\int_{a}^{b}f(x)dx-\int_{a}^{b}g(x)dx$$

第19講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：12

[解説]

放物線は，右図のように，区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ では

$$y > 0$$

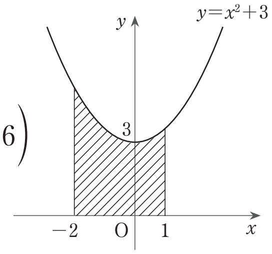
よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^{1} (x^2+3)dx \quad \text{[A]}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3}+3\right) - \left(-\frac{8}{3}-6\right)$$

$$= \mathbf{12}$$



[A]　区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸, および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

2 [正解] ウ：6

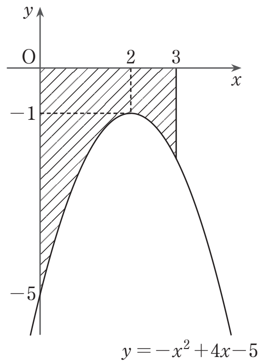
[解説]

$$y=-x^2+4x-5$$

$$=-(x-2)^2-1$$

より，区間 $0\leqq x\leqq 3$ では，放物線は，右図のように x 軸の下側にあるから

$$y<0$$



よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^3\{-(-x^2+4x-5)\}dx$$ [B]

$$=\int_0^3(x^2-4x+5)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_0^3$$

$$=(9-18+15)-(0-0+0)$$

$$=6$$

[B]　区間 $a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\leqq 0$ のとき, 曲線 $y=f(x)$ と x 軸, および 2 直線$x=a$，$x=b$で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$$

第19講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：4，イ：3

[解説]

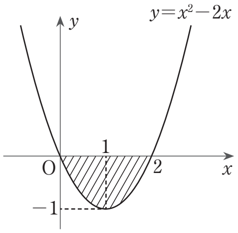
放物線 $y=x^2-2x$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-2x=0$$

の解である。これを解くと

$x(x-2)=0$ より

$$x=0,\ 2$$



よって，右図から求める面積は

$$\int_0^2\{-(x^2-2x)\}dx \quad \text{[A]}$$

$$=\int_0^2(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+4\right)-(0+0)=\frac{4}{3}$$

[A]　区間 $a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき，2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$, および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

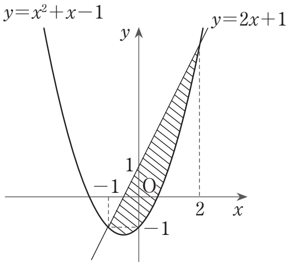
2 **[正解]** ウ：9，エ：2

[解説]

放物線 $y=x^2+x-1$ と直線 $y=2x+1$ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2+x-1=2x+1$$

の解である。これを解くと



$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$x=-1,\ 2$$

よって，上図から求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\{(2x+1)-(x^2+x-1)\}dx$$ [B]

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

[B]　区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$, および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。